Über die Mittelpunktkurve und ihre Sonderfälle

Claussen, Uwe

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 17, 1965, S.62-96

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über die Mittelpunktkurve und ihre Sonderfälle *)

Von Uwe Claussen

Vorgelegt von **H. Schaefer**

(Eingegangen am 11. 5. 1965)

Übersicht: Alle Sonderfälle der Mittelpunktkurve werden mit den zugehörigen Polkonfigurationen, Kreispunktkurven und Anordnungen der Lagen der bewegten Ebene zusammengestellt für die Fälle, daß vier Lagen endlich benachbart sind, daß zwei und daß drei von vier Lagen unendlich benachbart sind.

Summary: All special cases of the center-point curve are put together with the corresponding pole-configurations, circle-point curves and arrangements of positions of the moved plane for the cases, that four positions are finitaly separated, that two of four positions and that three of four positions are infinitesimally close.

1. Einführung

Die moderne Getriebesynthese wurde von *Burmester*, *Grübler*, *Müller* und *Reuleaux* begründet [6, 9, 17, 19][1]). *Burmester* [6] entwickelte die Theorie der Mittelpunktkurve und gab bereits einige ihrer Sonderfälle an. *Alt*, der die Arbeiten von *Burmester* fortsetzte, leitete zwei weitere Sonderfälle der Mittelpunktkurve ab [2]. *Alt* und *Lichtenheldt* [1, 13] untersuchten einige der bekannten Sonderfälle eingehend. Sie gingen dabei im wesentlichen von der Voraussetzung aus, daß alle vier Lagen der bewegten Ebene endlich benachbart seien.

In der neueren Literatur werden die Sonderfälle der Mittelpunktkurve viel verwendet, um einfache Konstruktionsverfahren für Gelenkgetriebe zu entwickeln (vgl. z. B. [10, 11, 12, 13, 15]). Eine Zusammenstellung aller Sonderfälle wäre für die Fortsetzung dieser Arbeiten sicher von Nutzen.

Derartige Zusammenstellungen existieren bereits für einen speziellen Fall der Mittelpunktkurve, die sogenannte „Mittelpunktkurve mit Doppelpunkt“ oder mit „Knoten“, die z. B. immer dann auftritt, wenn je zwei [21] oder alle vier [20] Lagen der bewegten Ebene unendlich benachbart sind.

Die allgemeine Form der Mittelpunktkurve tritt im allgemeinen dann auf, wenn alle vier Lagen der bewegten Ebene endlich benachbart sind oder wenn zwei oder wenn drei der vier Lagen unendlich benachbart sind. Die Sonderfälle der allgemeinen Form der Mittelpunktkurve sind noch nicht alle bekannt, und auch die bekannten Sonderfälle wurden noch nicht alle untersucht; insbesondere

*) Gekürzte Fassung einer Dissertation am Institut für Getriebelehre (Prof. Dr.-Ing. B. Dizioğlu) der Techn. Hochschule Braunschweig.

[1]) Angaben in eckigen Klammern [ ] verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

wurde bisher kaum untersucht, unter welchen Umständen die Sonderfälle der Mittelpunktkurve auftreten können, wenn zwei oder drei von vier Lagen der bewegten Ebene unendlich benachbart sind.

In der vorliegenden Arbeit werden nun alle Sonderfälle der allgemeinen Form der Mittelpunktkurve unter einheitlichen Gesichtspunkten abgeleitet, untersucht und zusammengestellt. Damit wird die Theorie der Mittelpunktkurve zu einem gewissen Abschluß gebracht. Um eine gewisse Vollständigkeit der Arbeit zu erreichen, wurden ihr nachträglich einige der wichtigsten Grundlagen der Maßsynthese der ebenen Gelenkgetriebe und zusätzliche neue [15, 22] bzw. allgemeine [9, 19] Literatur beigegeben.

2. Grundlagen der Maßsynthese ebener Gelenkgetriebe

Wenn alle Punkte eines bewegten starren Körpers (Getriebegliedes, Maschinenteiles) Bahnkurven beschreiben, die einer und derselben Ebene parallel sind, spricht man von einer ebenen Bewegung. Für die Untersuchung und den Entwurf ebener Getriebe genügt es im allgemeinen, wenn man die Bewegung einer starren Ebene relativ zu einer ihr parallelen Ebene betrachtet. Die Maßsynthese der ebenen Gelenkgetriebe beschäftigt sich daher vor allem mit den geometrischen Beziehungen, die zwischen verschiedenen homologen Lagen bestehen, die eine bewegte Ebene im Laufe ihrer Bewegung einnimmt.

Da die Lage einer bewegten Ebene durch die Angabe der Lage zweier ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist, genügt es meist, die homologen Lagen einer eben bewegten Strecke zu betrachten. Statt von den homologen Lagen einer bewegten Ebene spricht man oft auch einfach von den homologen Lagen einer Strecke, eines Getriebegliedes oder noch einfacher von „den Lagen“.

In Abb. 1 sind zwei homologe Lagen E_1 und E_2 der bewegten Ebene E durch Angabe der zugehörigen homologen Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ vorgegeben. Die beiden Mittelsenkrechten zu den Strecken $\overline{A_1A_2}$ bzw. $\overline{B_1B_2}$ schneiden sich im

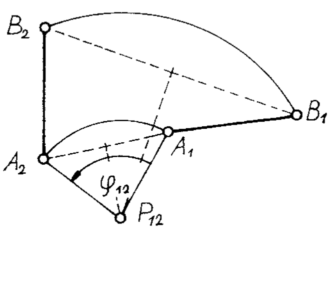


Abb. 1. Zwei Lagen $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$, Drehpol P_{12}, Drehwinkel φ_{12}

„selbstentsprechenden Punkt“ oder „(Dreh-)Pol“ P_{12} der beiden Ebenenlagen E_1 und E_2. Durch Drehung um den Pol P_{12} und den Drehwinkel φ_{12}, der entgegen dem Uhrzeiger positiv gezählt wird und nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt ist, kann man die Lage E_1 in die Lage E_2 überführen.

In Abb. 2 sind drei homologe Lagen E_1, E_2 und E_3 der bewegten Ebene E durch Angabe der zugehörigen homologen Strecken $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ und $\overline{A_3B_3}$

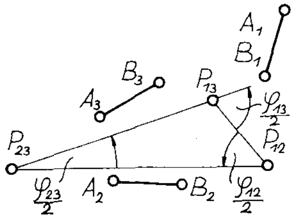


Abb. 2. Drei Lagen, Poldreieck, Drehwinkel

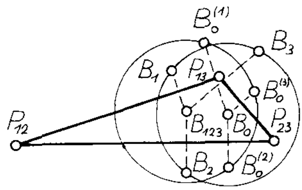


Abb. 3. Poldreieck, Grundpunkt B_{123}, Mittelpunkt B_0

vorgegeben. Zu je zwei Lagen gibt es einen Pol, im ganzen also die drei Pole P_{12}, P_{23} und P_{13}, die zusammen ein sogenanntes „Poldreieck“ bilden. Die drei Poldreieckswinkel sind halb so groß wie die entsprechenden drei Drehwinkel (Abb. 2).

In Abb. 3 ist ein Poldreieck vorgegeben und von einem Punkt B der bewegten Ebene die Lage B_1. Man spiegelt B_1 an der Polgeraden $\overline{P_{12}\,P_{13}}$ und erhält den sogenannten „Grundpunkt“ B_{123}. Durch Spiegelung dieses Grundpunktes an der Polgeraden $\overline{P_{13}\,P_{23}}$ erhält man die homologe Lage B_3 und durch Spiegelung an $\overline{P_{12}\,P_{23}}$ die homologe Lage B_2 des Punktes B.

Der Mittelpunkt des Kreises durch die drei homologen Lagen B_1, B_2 und B_3 heiße B_0. Wenn B_0 gegeben und B_{123} gesucht ist, spiegelt man B_0 an den drei Polgeraden und erhält die drei Punkte $B_0{}^{(1)}$, $B_0{}^{(2)}$ und $B_0{}^{(3)}$, die auf einem Kreis mit B_{123} als Mittelpunkt liegen (Abb. 3).

In Abb. 4 sind vier homologe Lagen E_1, E_2, E_3 und E_4 der bewegten Ebene E durch Angabe der zugehörigen vier homologen Strecken $\overline{C_1\,D_1}$, $\overline{C_2\,D_2}$, $\overline{C_3\,D_3}$ und $\overline{C_4\,D_4}$ vorgegeben. Daraus lassen sich die sechs Pole P_{12}, P_{23}, P_{13}, P_{14},

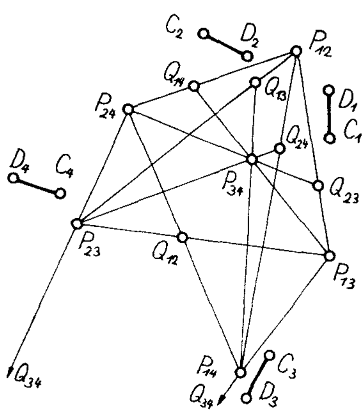


Abb. 4. Vier Lagen, Polkonfiguration, Hilfspunkte Q

P_{24} und P_{34} konstruieren, die zusammen oft auch als die zu den vier Lagen gehörige „Polkonfiguration" bezeichnet werden. Aus den sechs Polen lassen sich vier Poldreiecke bilden.

Der Pol P_{12} ist selbstentsprechender Punkt der Lagen E_1 und E_2 der bewegten Ebene E. Die homologen Lagen dieses Punktes in E_3 und E_4 erhält man durch Spiegelung von P_{12} an der Polgeraden $\overline{P_{13}\,P_{23}}$ bzw. an der Polgeraden $\overline{P_{14}\,P_{24}}$ und nennt sie „Spiegelpole" P_{12}^3 bzw. P_{12}^4.

Zwei Pole, deren (untere) Indizes keine gleichen Ziffern enthalten, heißen „Gegenpole". Aus den sechs Polen lassen sich die drei „Gegenpolpaare" P_{12}, P_{34}; P_{13}, P_{24}; P_{23}, P_{14} bilden. Ist einer der beiden Pole ein Spiegelpol, so spricht man analog von „Spiegelgegenpolen" und „Spiegelgegenpolpaaren".

Ein aus zwei Gegenpolpaaren gebildetes Viereck, in dem jeweils ein Gegenpolpaar die Endpunkte einer Diagonalen bildet, heißt „Gegenpolviereck". Aus den sechs Polen lassen sich drei Gegenpolvierecke bilden; ergänzt man diese zu vollständigen Vierseiten, so erhält man die Hilfspunkte Q_{12}, Q_{34}; Q_{13}, Q_{24} und Q_{23}, Q_{14} (Abb. 4).

Die Anordnung der Pole und der Hilfspunkte Q für den Fall, daß zwei bzw. drei von vier homologen Lagen der bewegten Ebene unendlich benachbart sind, wurde von *Alt* abgeleitet:

Für den Fall, daß zwei von vier homologen Lagen der bewegten Ebene unendlich benachbart sind, bringt Abb. 5 die Polkonfiguration [3] mit den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen.

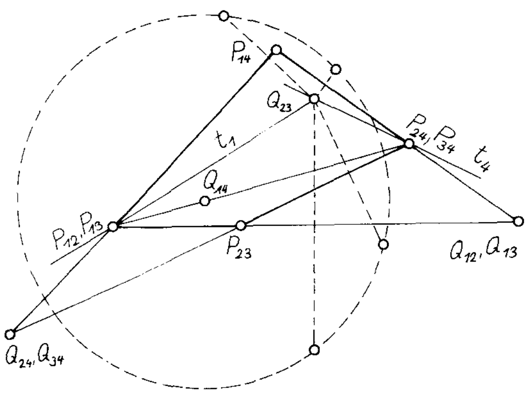


Abb. 5. Allgemeine Polkonfiguration, wenn zwei von vier Lagen unendlich benachbart sind [3]

Für den Fall, daß drei von vier homologen Lagen der bewegten Ebene unendlich benachbart sind, bringt Abb. 6 die Polkonfiguration [4] mit den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen.

Aus der letztgenannten Polkonfiguration läßt sich die Konstruktion des Krümmungskreises der Mittelpunktkurve in einem beliebigen Punkt, z. B. in P_{13}, ableiten (Abb. 7). P_{24} ist der Gegenpol (bzw. konjugierte Punkt) zu P_{13}. S ist der Schnittpunkt der Tangenten t_{24} und t_{13} an die Mittelpunktkurve in

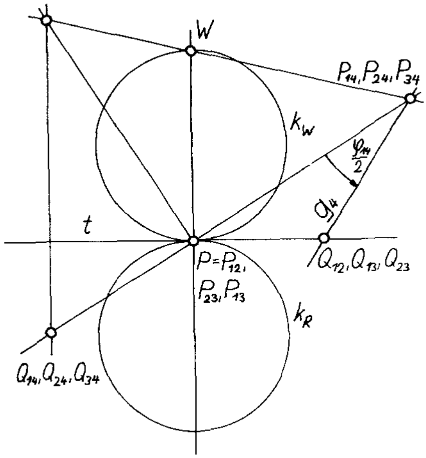


Abb. 6. Allgemeine Polkonfiguration, wenn drei von vier Lagen unendlich benachbart sind [4]

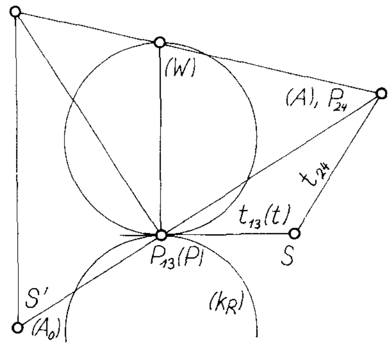


Abb. 7. Konstruktion des Krümmungskreises „(k_R)“ der Mittelpunktkurve im Punkte P_{13}

P_{24} bzw. P_{13}. S' ist der Gegenpol (bzw. konjugierte Punkt) zu S. Wenn man P_{13} als Momentanpol P betrachtet, t_{13} als Poltangente t, P_{24} als bewegten Punkt A und S' als zugehörigen Bahnkurven-Krümmungsmittelpunkt A_0, dann ist der Rückkehrkreis k_R der Krümmungskreis der Mittelpunktkurve in P_{13}.

Vier homologe Lagen E_1, E_2, E_3 und E_4 der bewegten Ebene E seien beliebig vorgegeben. Der geometrische Ort aller Punkte einer dieser Ebenenlagen, die mit ihren weiteren drei homologen Punktlagen auf einem Kreis liegen, wird „(*Burmester*sche) Kreispunktkurve“ genannt. Der geometrische Ort aller zugehörigen Kreismittelpunkte in der festen Ebene ist die sogenannte „(*Burmester*sche) Mittelpunktkurve“.

Die Mittelpunktkurve ist der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die gegenüberliegenden Seiten eines Gegenpolvierecks unter je zwei gleichen bzw. unter sich zu 180° ergänzenden Winkeln erscheinen [5]. Oder anders formuliert:

Durch jeden beliebigen Punkt der Mittelpunktkurve lassen sich zwei aufeinander senkrechte Gerade („Mittelgerade“) ziehen, mit deren jeder die beiden Geraden durch diesen Punkt der Mittelpunktkurve und ein beliebiges Paar von Gegenpolen oder konjugierten Punkten auf ihr gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne bilden (vgl. [18]).

Dieselben Winkelbeziehungen gelten auch zwischen einem Punkt der Kreispunktkurve und den zugehörigen Spiegelgegenpolpaaren bzw. konjugierten Punkten auf der Kreispunktkurve.

Die Mittelpunktkurve ist identisch mit der sogenannten „Pollagenkurve“, das ist der geometrische Ort eines fünften Poles, wenn ein Gegenpolviereck gegeben ist. Wenn man diesen fünften Pol auf der Pollagenkurve beliebig annimmt und an den vier Seiten des Gegenpolvierecks spiegelt, liegen die vier gespiegelten

Punkte auf einem Kreis, als dessen Mittelpunkt der sechste Pol als Gegenpol zum fünften eindeutig bestimmt ist. Durch verschiedene Annahmen eines fünften Poles erhält man verschiedene Gegenpolpaare oder Paare sogenannter „konjugierter Punkte" auf der Mittelpunktkurve oder Pollagenkurve.

Aus dem Satz über die Mittelgeraden läßt sich die Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkt an die Mittelpunktkurve ableiten (Abb. 8). Man bestimmt den Gegenpol (oder konjugierten Punkt) zum gegebenen Punkt und

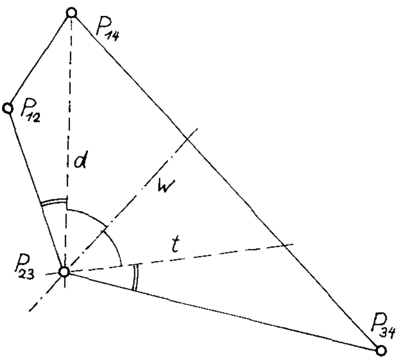


Abb. 8. Konstruktion der Tangente t an die Mittelpunktkurve im Punkte P_{23}

bildet aus diesem Paar konjugierter Punkte und einem beliebigen Gegenpolpaar auf der *Mittelpunktkurve ein Gegenpolviereck*, halbiert den Winkel, dessen Scheitelpunkt der gegebene Punkt ist, spiegelt die Diagonale durch diesen Punkt an der Winkelhalbierenden und erhält die gesuchte Tangente.

Die Mittelpunktkurve (die mit der Pollagenkurve identisch ist) und die Kreispunktkurve sind gleichartige Kurven. Zwischen der Mittelpunktkurve und den Gegenpolpaaren (oder konjugierten Punkten) bestehen dieselben Beziehungen wie zwischen der Kreispunktkurve und den Spiegelgegenpolpaaren (oder „konjugierten Punkten auf der Kreispunktkurve") [5, 6]. Im folgenden wird vor allem die Mittelpunktkurve behandelt, die Ergebnisse dieser Arbeit lassen sich aber unschwer auch auf die Kreispunktkurve anwenden.

Die Mittelpunktkurve ist eine zirkulare Kurve dritter Ordnung und gehört zur Gruppe der „Fokalkurven". Sie kann einteilig, zweiteilig und im Grenzfall mit einem reellen Doppelpunkt, und zwar einem Knoten, auftreten [5, 6].

Eine Mittelpunktkurve ist im allgemeinen durch zwei Gegenpolpaare oder Paare konjugierter Punkte bestimmt. Jede Mittelpunktkurve läßt sich konstruieren aus den Schnittpunkten eines Geradenbüschels durch den sogenannten „Hauptbrennpunkt G" mit einem Kreisbüschel, dessen Mittelpunkte auf der sogenannten „Mittellinie z" der Mittelpunktkurve liegen (vgl. [5, 6]).

In den Abb. 9, 10 und 11 ist G der Hauptbrennpunkt einer Mittelpunktkurve und z ihre Mittellinie. Bei der zweiteiligen Mittelpunktkurve (Abb. 9) sind B' und B'' die Büschelpunkte des erzeugenden Kreisbüschels und der Punkt D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{B' B''}$. Bei der Mittelpunktkurve mit Knoten

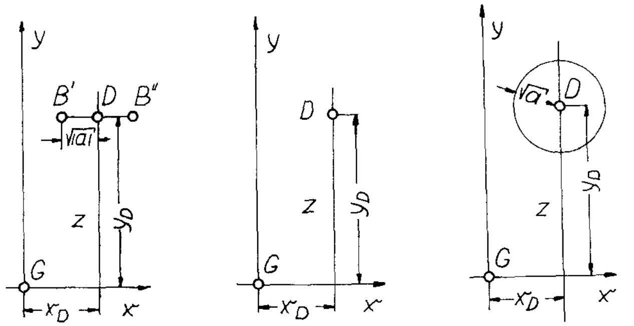


Abb. 9, 10, 11. Koordinatensystem und Bestimmungsstücke für die Gleichung der zweiteiligen Mittelpunktkurve, der Mittelpunktkurve mit Knoten, der einteiligen Mittelpunktkurve

(Abb. 10) ist D der Knoten und bei der einteiligen Mittelpunktkurve (Abb. 11) der Mittelpunkt des Orthogonalkreises des erzeugenden Kreisbüschels. Als Gleichung der Mittelpunktkurve erhält man im gewählten Koordinatensystem (Abb. 9, 10 und 11):

$$m \equiv (x^2 + y^2)(x - 2\,x_D) + (x_D^2 - y_D^2 + a)\,x + 2\,x_D\,y_D\,y = 0\,; \quad \text{(vgl. [14])} \tag{2.1}$$

Dabei ergibt sich für $a < 0$ die zweiteilige Mittelpunktkurve mit $\sqrt{|a|}$ als halber gemeinsamer Sehne der Büschelkreise, für $a = 0$ ergibt sich die Mittelpunktkurve mit Knoten und für $a > 0$ die einteilige Mittelpunktkurve mit $\sqrt{a}$ als Radius des Orthogonalkreises.

Wenn der Hauptbrennpunkt G der Mittelpunktkurve im Unendlichen liegt und der Punkt D im Endlichen, zerfällt die Mittelpunktkurve in eine gleichseitige Hyperbel und die (einfach zählende) unendlich ferne Gerade (vgl. [6]). Wenn G und D im Unendlichen liegen, zerfällt die Mittelpunktkurve in eine Gerade und die (doppelt zählende) unendlich ferne Gerade (vgl. [2]).

3. Die Sonderfälle der Mittelpunktkurve

Wenn die Mittelpunktkurve in einen Kegelschnitt (Kurve zweiter Ordnung) und eine Gerade (Kurve erster Ordnung) zerfällt, spricht man von einem „Sonderfall" der Mittelpunktkurve. *Burmester* [6] beschrieb die Sonderfälle

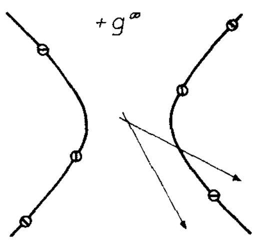


Abb. 12. Sonderfall „Hyperbel + unendlich ferne Gerade" mit Gegenpolpaaren

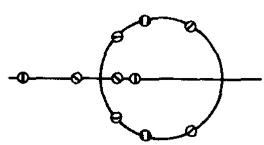


Abb. 13. Sonderfall „Kreis + Gerade" mit Gegenpolpaaren

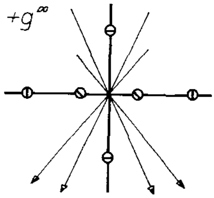


Abb. 14. Sonderfall „Zwei senkrechte Gerade + unendlich ferne Gerade“ mit Gegenpolpaaren

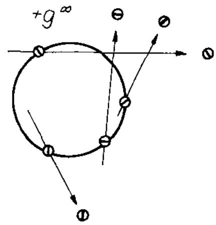


Abb. 15. Sonderfall „Kreis + unendlich ferne Gerade“ mit Gegenpolpaaren

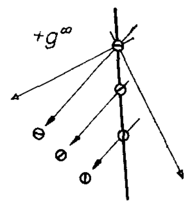


Abb. 16. Sonderfall „Gerade + unendlich ferne Gerade“ mit Gegenpolpaaren

„Hyperbel + unendlich ferne Gerade“ (Abb. 12), „Kreis + Gerade“ (Abb. 13) und „Zwei senkrechte Gerade + unendlich ferne Gerade“ (Abb. 14), *Alt* [2] die Sonderfälle „Kreis + unendlich ferne Gerade“ (Abb. 15) und „Gerade + unendlich ferne Gerade“ (Abb. 16). Wie sich im folgenden zeigen wird, sind damit aber noch nicht alle Sonderfälle der Mittelpunktkurve bekannt.

Deshalb sollen hier zunächst alle Sonderfälle der Mittelpunktkurve abgeleitet werden: Wenn die Mittelpunktkurve in Kegelschnitt und Gerade zerfallen soll, müssen die Gleichung der Mittelpunktkurve und die Gleichung einer Kurve, die aus Kegelschnitt und Gerade besteht, identisch gleich sein. Man kann also die Koeffizienten entsprechender Glieder gleichsetzen. Dieser Koeffizientenvergleich liefert ein Gleichungssystem, dessen Lösungen, in die Gleichung der Mittelpunktkurve oder der Kurve „Kegelschnitt + Gerade“ eingesetzt, die einzelnen Sonderfälle der Mittelpunktkurve ergeben.

Die allgemeine Gleichung einer Geraden g lautet in homogenen Koordinaten:

$$g \equiv ux_1 + vx_2 + wx_3 = 0 \tag{3.1}$$

Die Verwendung homogener Koordinaten hat den Vorteil, daß man durch geeignete Wahl der Werte der Koeffizienten u, v und w jede beliebige Gerade der Ebene darstellen kann, ohne daß Koeffizienten unendlich groß werden oder alle gleichzeitig gegen Null gehen müssen. So hat z. B. die unendlich ferne Gerade g^∞ hier die Gleichung:

$$g^\infty \equiv wx_3 = 0 \tag{3.2}$$

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes k_e lautet in homogenen Koordinaten:

$$k_e \equiv px_1^2 + qx_2^2 + nx_1x_2 + rx_1x_3 + sx_2x_3 + tx_3^2 = 0 \tag{3.3}$$

Die allgemeine Gleichung einer Kurve, die aus Kegelschnitt + Gerade, symbolisch $k_e + g$, besteht, lautet also in homogenen Koordinaten:

$$k_e + g \equiv (px_1^2 + qx_2^2 + nx_1x_2 + rx_1x_3 + sx_2x_3 + tx_3^2)\,(ux_1 + vx_2 + wx_3) = 0 \tag{3.4}$$

Die zu untersuchende Gleichung der Mittelpunktkurve m (2.1) lautet, wenn man die Koeffizienten in geeigneter Weise zusammenfaßt, in homogenen Koordinaten:

$$m \equiv (x_1^2 + x_2^2)\,(cx_1 + ex_3) + fx_1x_3^2 + hx_2x_3^2 = 0 \tag{3.5}$$

Zur Durchführung des Koeffizientenvergleiches werden die Gleichungen (3.4) und (3.5) ausmultipliziert, geordnet und entsprechende Glieder paarweise gleichgesetzt:

$$
\begin{array}{lccccc}
k_e + g \equiv & pux_1^3 + & qvx_2^3 + & (nu + pv)\, x_1^2\, x_2 + & (qu + nv)\, x_1\, x_2^2 + & \\
 & \| & \| & \| & \| & \\
m \equiv & cx_1^3 + & 0 + & 0 + & cx_1\, x_2^2 + & \\
 & & & & & \\
+ & (ru + pw)\, x_1^2\, x_3 + & (sv + qw)\, x_2^2\, x_3 + & (su + rv + nw)\, x_1\, x_2\, x_3 + & & \\
 & \| & \| & \| & & \\
+ & ex_1^2\, x_3 + & ex_2^2\, x_3 + & 0 + & & \\
 & & & & & \\
+ & (tu + rw)\, x_1\, x_3^2 + & (tv + sw)\, x_2\, x_3^2 + & twx_3^3 = 0 & & (3.6) \\
 & \| & \| & \| & & \\
+ & fx_1\, x_3^2 + & hx_2\, x_3^2 + & 0 = 0 & & (3.7)
\end{array}
$$

und man erhält:

$$pu = c \tag{3.8}$$
$$qv = 0 \tag{3.9}$$
$$nu + pv = 0 \tag{3.10}$$
$$qu + nv = c \tag{3.11}$$
$$ru + pw = e \tag{3.12}$$
$$sv + qw = e \tag{3.13}$$
$$su + rv + nw = 0 \tag{3.14}$$
$$tu + rw = f \tag{3.15}$$
$$tv + sw = \mathrm{h} \tag{3.16}$$
$$tw = 0 \tag{3.17}$$

Aus den Gleichungen (3.8) bis (3.11) folgt:

$$p = q + n \tfrac{v}{u} \text{ und} \tag{3.18}$$
$$q = p + n \tfrac{u}{v} \tag{3.19}$$

und daraus

$$n = 0 \text{ und} \tag{3.20}$$
$$p = q \tag{3.21}$$

Der Kegelschnitt k_e (3.3) kann also nur ein Kreis k_s sein.

Setzt man (3.20) und (3.21) in (3.8) bis (3.17) ein, so erhält man

$$pu = c \tag{3.22}$$
$$pv = 0 \tag{3.23}$$
$$ru + pw = e \tag{3.24}$$
$$sv + pw = e \tag{3.25}$$
$$su + rv = 0 \tag{3.26}$$
$$tu + rw = f \tag{3.27}$$
$$tv + sw = h \tag{3.28}$$
$$tw = 0 \tag{3.29}$$

Um die beiden Gleichungen (3.23) und (3.29) zu erfüllen, kann man vier verschiedene Annahmen machen:

Annahme 1: $w = 0$ und $v = 0$
Annahme 2: $t = 0$ und $v = 0$
Annahme 3: $w = 0$ und $p = 0$
Annahme 4: $t = 0$ und $p = 0$

Das Gleichungssystem (3.22) bis (3.29) muß nacheinander unter diesen vier Annahmen behandelt werden, wobei der Rechnungsgang im Prinzip jedesmal gleich ist. Als Beispiel sei hier die Durchrechnung mitgeteilt, der die Annahme 2 zu Grunde liegt.

Annahme 2: $v = 0$ und $t = 0$.

Mit diesen Annahmen ergibt sich aus dem Gleichungssystem (3.22) bis (3.29):

$$up = c \tag{3.30}$$
$$ur + wp = e \tag{3.31}$$
$$wp = e \tag{3.32}$$
$$wr = f \tag{3.33}$$
$$ws = h \tag{3.34}$$
$$su = 0 \tag{3.35}$$

und aus den Gleichungen (3.31) und (3.32) erhält man:

$$ur = 0 \tag{3.36}$$

Um die Gleichungen (3.35) und (3.36) erfüllen zu können, muß man annehmen, daß entweder $u = 0$ (Annahme 2a) oder $s = 0$ und $r = 0$ (Annahme 2b) ist.

Annahme 2a: $v = 0$, $t = 0$ und $u = 0$.

Diese Annahme reduziert das Gleichungssystem zu

$$0 = c \tag{3.37}$$
$$wp = e \tag{3.38}$$
$$wr = f \tag{3.39}$$
$$ws = h \tag{3.40}$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn man für vier von den sieben Koeffizienten w, p, r, s, e, f und h beliebige Werte annimmt und die restlichen drei Koeffizienten aus den Gleichungen (3.38) bis (3.40) berechnet. Alle anderen Koeffizienten sind teils nach Voraussetzung, teils nach Ableitung gleich Null.

Damit ergibt sich für die Gleichung der Mittelpunktkurve m bzw. ihrer Zerfallprodukte Kreis + Gerade $k_s + g$:

$$m \equiv (x_1^2 + x_2^2)\, e x_3 + f x_1 x_3^2 + h x_2 x_3^2 = 0 \quad \text{bzw.} \tag{3.41}$$
$$k_s + g \equiv (p x_1^2 + p x_2^2 + r x_1 x_3 + s x_2 x_3)\, w x_3 = 0 \tag{3.42}$$

Das ist ein Kreis, dessen Umfang den Koordinatenursprung enthält und die unendlich ferne Gerade (vgl. Abb. 15). Unter Verwendung der Gleichungen (3.38) bis (3.40) läßt sich zeigen, daß die beiden Gleichungen (3.41) und (3.42) identisch sind.

Annahme 2b: $v = 0$, $t = 0$, $s = 0$, $r = 0$.

Mit diesen Annahmen reduziert sich das Gleichungssystem (3.22) bis (3.29) zu:

$$pu = c \tag{3.43}$$
$$pw = e \tag{3.44}$$
$$0 = f \tag{3.45}$$
$$0 = h \tag{3.46}$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn man für drei von den fünf Koeffizienten p, u, w, c und e beliebige Werte wählt und daraus mit den Gleichungen (3.43) und (3.44) die beiden anderen berechnet. Alle anderen Koeffizienten sind teils nach Voraussetzung, teils nach Ableitung gleich Null.

Damit wird aus der Gleichung der Mittelpunktkurve m bzw. aus der Gleichung ihrer Zerfallsprodukte Kreis + Gerade $k_s + g$:

$$m \equiv (x_1^2 + x_2^2)\,(cx_1 + ex_3) = 0 \quad \text{bzw.} \tag{3.47}$$
$$k_s + g \equiv (px_1^2 + px_2^2)\,(ux_1 + wx_3) = 0 \tag{3.48}$$

Das ist eine Gerade parallel zur x_2-Achse und der Koordinatensprung als isolierter Punkt oder Einsiedler (vgl. dazu Abb. 17).

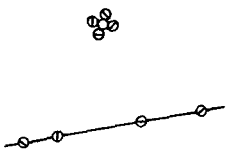


Abb. 17. Sonderfall „Gerade + isolierter Punkt" mit Gegenpolpaaren

Zwei von den drei in Abschnitt 2 behandelten möglichen Formen der Mittelpunktkurven waren bereits Sonderfälle. Die Untersuchung der dritten Form auf Sonderfälle wurde in diesem Abschnitt 3 beschrieben. Damit läßt sich folgende Liste aller Sonderfälle der Mittelpunktkurve aufstellen:

Kreis + unendlich ferne Gerade, [2], Abb. 15;
Gerade + unendlich ferne Gerade, [2], Abb. 16;
(Gleichseitige) Hyperbel + unendlich ferne Gerade, [6, 18], Abb. 12;
Zwei (aufeinander) senkrechte Gerade + unendlich ferne Gerade, [6], Abb. 14;
Kreis + Gerade (durch den Mittelpunkt), [6, 7], Abb. 13;
Gerade + isolierter Punkt (Einsiedler), Abb. 17.

4. Die Gegenpolpaare bei den Sonderfällen der Mittelpunktkurve

In diesem Abschnitt wird zusammengestellt, wie die Gegenpolpaare (bzw. die Paare konjugierter Punkte) bei den einzelnen Sonderfällen der Mittelpunktkurve angeordnet sind. Unter Verwendung dieser Zusammenstellung läßt sich unschwer auch die umgekehrte Aufgabe lösen: die Mittelpunktkurve (Kreispunktkurve) in den einzelnen Sonderfällen zu konstruieren, wenn ein Gegenpolviereck (Spiegelgegenpolviereck) bekannt ist.

Die Mittelpunktkurve besteht aus Kreis + unendlich ferner Geraden (Abb. 15): Von jedem Gegenpolpaar liegt ein Pol auf dem Kreis und einer auf der unendlich fernen Geraden [2]. Halbiert man die Winkel, die von der Kreistangente in einem Pol und der Verbindungsgeraden von diesem Pol zu seinem unendlich fernen Gegenpol gebildet werden, so bildet jede der beiden Winkelhalbierenden mit den beiden Geraden durch den Pol auf dem Kreis und ein beliebiges Gegenpolpaar gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne (vgl. Abschnitt 2).

Die Mittelpunktkurve besteht aus Gerade + unendlich ferner Geraden (Abb. 16): Zu den Polen auf der Geraden liegen die Gegenpole im Unendlichen, und zwar alle in derselben Richtung [2]. Halbiert man die Winkel, die von dieser Richtung und der Geraden gebildet werden, so bilden die Geradenpaare

(„Richtungsgeradenpaare"), die man durch einen Punkt der Geraden und ein unendlich fernes Gegenpolpaar ziehen kann, mit jeder der Winkelhalbierenden gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne.

Die Mittelpunktkurve besteht aus Hyperbel + unendlich ferner Geraden (Abb. 12): Alle Gegenpolvierecke im Endlichen sind Parallelogramme, deren Diagonalen durch den Hyperbelmittelpunkt halbiert werden. Die Mittelgeraden eines jeden Poles im Endlichen sind zu den Asymptoten der Hyperbel parallel. Die Richtungsgeraden zu den zwei Polen eines Gegenpolpaares im Unendlichen bilden mit den Asymptoten gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne (vgl. [6]).

Die Mittelpunktkurve besteht aus zwei senkrechten Geraden + unendlich ferner Geraden (Abb. 14): Diesen Sonderfall kann man als Spezialfall des vorigen auffassen. Alle Gegenpolvierecke im Endlichen sind Rauten, deren Diagonalen durch den Schnittpunkt der beiden Geraden halbiert werden. Die Richtungsgeraden zu zwei Polen eines unendlich fernen Gegenpolpaares bilden mit jeder der beiden Geraden im Endlichen gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne (vgl. [6]).

Die Mittelpunktkurve besteht aus Kreis + Gerade (Abb. 13): Zwei Pole eines Gegenpolpaares auf dem Kreis liegen symmetrisch zur Geraden. Zwei Pole eines Gegenpolpaares auf der Geraden liegen, vom Kreismittelpunkt aus gesehen, in derselben Richtung; das Produkt ihrer Abstände vom Kreismittelpunkt ist gleich dem Quadrat des Kreisradius (vgl. [6]).

Die Mittelpunktkurve besteht aus Gerade + isoliertem Punkt (Abb. 17): Von jedem Gegenpolpaar liegt ein Pol auf der Geraden und der andere fällt mit dem isolierten Punkt zusammen.

Wenn man auf einem Sonderfall der Mittelpunktkurve drei Gegenpolpaare wählt und mit den üblichen Bezeichnungen P_{12}, P_{34}; P_{23}, P_{14}; P_{13}, P_{24} versieht, erhält man eine Polkonfiguration, der im allgemeinen vier Lagen der bewegten Ebene entsprechen. Durch verschiedene Wahl der Gegenpolpaare und ihrer Indizes kann man unendlich viele verschiedene Polkonfigurationen erhalten, deren jeder im allgemeinen vier homologe Lagen der bewegten Ebene entsprechen. Vor der Ableitung von Lagebeziehungen und Kreispunktkurven für die einzelnen Sonderfälle der Mittelpunktkurve muß man also aus den vielen verschiedenen Polkonfigurationen eine gewisse Auswahl treffen:

Wenn man alle wesentlich voneinander verschiedenen Polkonfigurationen, die bei einem bestimmten Sonderfall auftreten können, untersuchen will, muß man drei Gegenpolpaare in allen möglichen Kombinationen auf die Zerfallsteile der Mittelpunktkurve verteilen und jede einzelne Kombination untersuchen. Durch verschiedene spezielle Annahmen der metrischen Beziehungen zwischen den einzelnen Polen, z. B. auch durch das Zusammenfallenlassen zweier Gegenpole, kann man aus jeder dieser allgemeinen Polkonfigurationen beliebig viele spezielle Polkonfigurationen erhalten.

Die Bezeichnung der vier Lagen der bewegten Ebene durch die Indizes 1, 2, 3 und 4 ist willkürlich. Man könnte ebensogut z. B. 3, 1, 2 und 4 schreiben. Alle Polkonfigurationen, die durch eine derartige Vertauschung der Indizes auseinander hervorgehen, sind untereinander gleichwertig.

Eine vorgegebene Anordnung von drei Gegenpolpaaren kann man nur auf zwei wesentlich voneinander verschiedene Arten mit den üblichen Bezeichnungen P_{12}, P_{34}; P_{23}, P_{14}; P_{13}, P_{24} versehen: entweder bilden drei beliebig wählbare Pole (keine Gegenpole) ein Poldreieck und die drei zugehörigen Gegenpole haben eine Indexziffer gemeinsam, oder die drei ersten Pole haben eine Indexziffer gemeinsam und die drei Gegenpole bilden ein Poldreieck. Diese beiden Bezeichnungsarten gehen auseinander durch Austauschen der Indizes zweier Pole eines Gegenpolpaares hervor.

5. Sonderfälle bei teilweise unendlich benachbarten Lagen

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die Sonderfälle der Mittelpunktkurve und die zugehörigen Polkonfigurationen allgemein behandelt wurden, soll nun an einem Beispiel gezeigt werden, wie man die Sonderfälle der Mittelpunktkurve untersuchen kann, wenn einige von den vier Lagen der bewegten Ebene unendlich benachbart sind:

Von den vier Lagen der bewegten Ebene sollen zwei unendlich benachbart sein. Die Mittelpunktkurve soll in Hyperbel + unendlich ferne Gerade zerfallen. Wie muß die Polkonfiguration und wie müssen die Gegenpolvierecke aussehen.

In Spalte 1 der Tafel 1 werden die drei Gegenpolpaare A, A'; B, B'; C, C' in allen möglichen Kombinationen auf die einzelnen Zerfallsteile der Mittelpunktkurve verteilt, also drei, zwei, ein oder kein Gegenpolpaar auf die Hyperbel, der Rest jeweils auf die unendlich ferne Gerade. Auf die Indizes der Pole braucht man bei der hier vorliegenden symmetrischen Polkonfiguration nicht einzugehen.

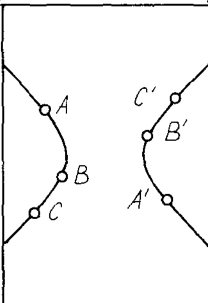
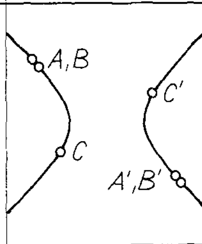
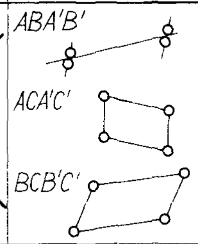
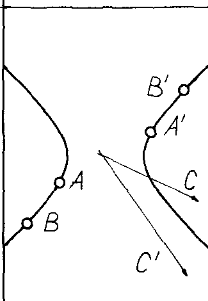
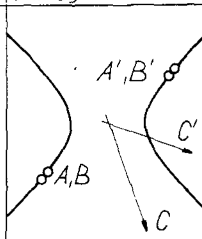
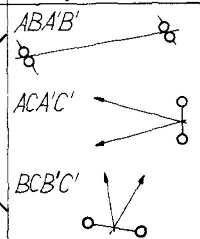
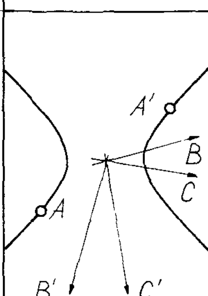
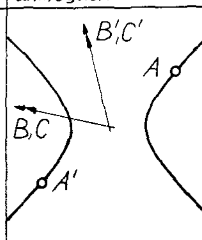
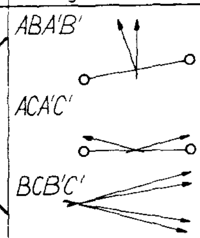
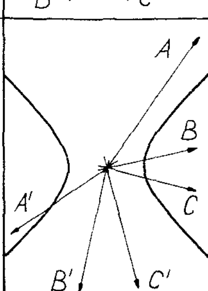
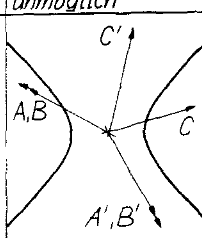
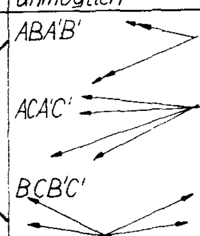
Wenn zwei von vier Lagen unendlich benachbart sein sollen, müssen zwei Pole unendlich benachbart sein und ebenso die beiden Gegenpole [3]. Zwei Pole, die im Unendlichen liegen, können unendlich benachbart sein, ebenso zwei Pole, die auf demselben Ast der Hyperbel liegen. Zwei Pole auf verschiedenen Ästen der Hyperbel können nicht unendlich benachbart sein, ebensowenig zwei Pole, von denen voraussetzungsgemäß einer im Endlichen und der andere im Unendlichen liegt.

In Spalte 2 der Tafel 1 sind jeweils die beiden Pole angegeben, die unendlich benachbart sein sollen, in Spalte 3 die Polkonfigurationen, die in diesem Fall entstehen und in Spalte 4 jeweils die drei zugehörigen Gegenpolvierecke.

Ergebnis: Wenn zwei von vier Lagen der bewegten Ebene unendlich benachbart sind, zerfällt die Mittelpunktkurve in Hyperbel + unendlich ferne Gerade in vier Fällen (Tafel 1, Spalte 4):

1. Ein Gegenpolviereck ist ein Parallelogramm (Zeile I, $ACA'C'$; I, $BCB'C'$).
2. Zwei Gegenseiten eines Gegenpolvierecks sind unendlich kurz, die beiden Hilfspunkte Q, die man durch Ergänzung des Gegenpolvierecks zu einem vollständigen Vierseit erhält, liegen im Unendlichen (I, $ABA'B'$; II, $ABA'B'$).
3. Ein Gegenpolpaar liegt im Endlichen, eines im Unendlichen. (II, $ACA'C'$; II, $BCB'C'$; III, $ABA'B'$; III, $ACA'C'$).
4. Zwei Gegenpolpaare liegen im Unendlichen derart, daß die Richtungsgeraden zu den Polen des einen Gegenpolpaares mit den Richtungsgeraden des ande-

Tafel 1

	1	2	3	4
	Polkonfiguration, wenn vierLagen endlich benachbart sind.	Zwei Pole (kein Gegenpolpaar) unendlich benachbart.	Polkonfiguration, wenn zwei von vier Lagen unendlich benachbart sind.	Gegenpolvierecke.
I		AB		
		AC;BC	wie bei AB	wie bei AB
		AB′;AC′;BC′	unmöglich	unmöglich
II		AB		
		AC;BC;AB′;AC′;BC′	unmöglich	unmöglich
III		BC		
		BC′	wie bei BC	wie bei BC
		AB;AC;AB′;AC′	unmöglich	unmöglich
IV		AB		
		AC;BC;AB′;AC′;BC′	wie bei AB	wie bei AB

Tafel 1: Zwei von vier Lagen sind unendlich benachbart. Gesucht sind die Polkonfigurationen, die auf den Sonderfall „Hyperbel + unendlich ferne Gerade" führen

ren gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne bilden (III, $BCB'C'$; IV, $ABA'B'$; IV, $ACA'C'$; IV, $BCB'C'$). Diese Angabe gestattet noch keine Konstruktion der Mittelpunktkurve. Dazu müssen noch zusätzliche Stücke vorgegeben werden, z. B. ein Gegenpolpaar im Endlichen. Die Polkonfigurationen der Zeile IV, Tafel 1, bei denen das nicht möglich ist, werden in Abschnitt 8 gesondert behandelt.

Die Ergebnisse dieser und entsprechender Untersuchungen an den übrigen Sonderfällen der Mittelpunktkurve unter verschiedenen Annahmen darüber, wie viele von den vier Lagen unendlich bzw. endlich benachbart sind, werden in den Tafeln 2 bis 4 zusammengestellt.

6. Bestimmung der vier Lagen aus der Polkonfiguration

In den beiden letzten Abschnitten wurde gezeigt, wie man für die einzelnen Sonderfälle der Mittelpunktkurve die zugehörigen wesentlich voneinander verschiedenen Polkonfigurationen bestimmen kann. In diesem Abschnitt soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden, wie man aus einer vorgegebenen Polkonfiguration die allgemeinen Beziehungen bestimmt, die zwischen den zugehörigen vier homologen Lagen der bewegten Ebene bestehen.

Dabei kann man allgemein so vorgehen, daß man in einer Lage zwei Punkte vorgibt, nach Abschnitt 2 die homologen Punktlagen in den drei anderen Ebenenlagen bestimmt und versucht, allgemeine Beziehungen zwischen den homologen Lagen zu formulieren.

Beispiel: Die Mittelpunktkurve zerfällt in Gerade + isolierten Punkt; und zwar wird angenommen, daß die Pole P_{12}, P_{23} und P_{13} exakt zusammenfallen. In Abb. 18 werden die vier homologen Lagen $\overline{A_1 B_1}$ bis $\overline{A_4 B_4}$ des bewegten Getriebegliedes $\overline{AB}$ konstruiert. Als allgemeine Beziehung zwischen den vier Lagen entnimmt man der Abb. 18: Die drei Lagen $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$ und $\overline{A_3 B_3}$ gehen durch Drehung um denselben Pol auseinander hervor, die vierte Lage $\overline{A_4 B_4}$ ist beliebig.

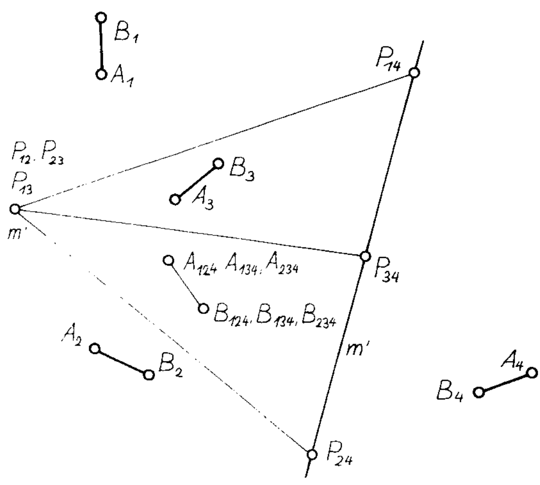


Abb. 18. Anordnung der vier Lagen beim Sonderfall „Gerade + isolierter Punkt"

Diese Ableitung gilt unter der Voraussetzung, daß die Pole P_{12}, P_{23} und P_{13}, die zusammen ein Poldreieck bilden, exakt zusammenfallen; die übrigen Pole können endlich oder unendlich benachbart sein.

Beispiel: Die Mittelpunktkurve zerfällt in zwei senkrechte Gerade + unendlich

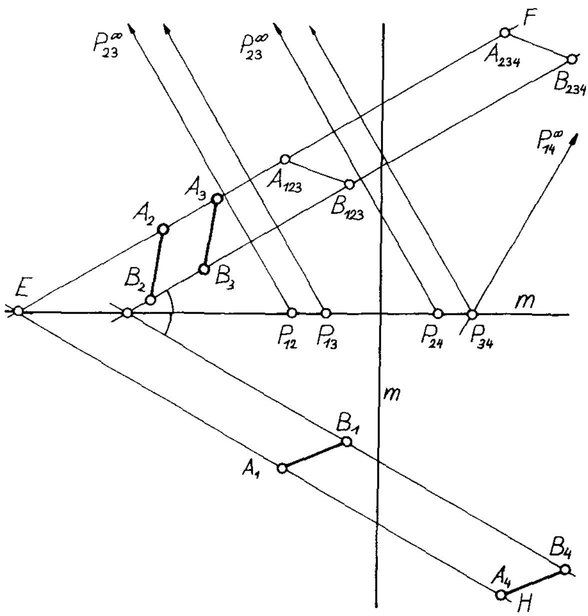


Abb. 19
Anordnung der vier Lagen beim Sonderfall „zwei senkrechte Gerade + unendlich ferne Gerade“

ferne Gerade. Ein Gegenpolpaar liegt im Unendlichen, zwei auf einer Geraden im Endlichen.

In Abb. 19 sind aus diesen Angaben vier homologe Lagen $\overline{A_1 B_1}$ bis $\overline{A_4 B_4}$ eines bewegten Getriebegliedes $\overline{AB}$ bestimmt. Da die Pole P_{23}^{∞} und P_{14}^{∞} im Unendlichen liegen, sind die Vierecke $A_2 B_2 B_3 A_3$ und $A_1 B_1 B_4 A_4$ Parallelogramme. Nach den Gesetzmäßigkeiten der Spiegelung ist dann auch das Viereck $A_{123} B_{123} B_{234} A_{234}$ ein Parallelogramm und es gilt:

$$\sphericalangle EA_2 B_2 = \sphericalangle EA_3 B_3 = \sphericalangle FA_{123} B_{123} = \sphericalangle FA_{234} B_{234} = \sphericalangle HA_4 B_4 = \\ = \sphericalangle HA_1 B_1 \qquad (6.1)$$

Die beiden Translationen gehen also, von dem bewegten Getriebeglied aus gesehen, in derselben Richtung vor sich. Das gilt auch dann, wenn eine oder beide Translationen infinitesimal klein sind.

Lichtenheldt [13] behandelt die Frage, wie bei drei gegebenen Lagen der bewegten Ebene die vierte angenommen werden muß, damit eine bestimmte Polkonfiguration entsteht, die zu einem Zerfall der Mittelpunktkurve führt. Es läßt sich zeigen, daß die Ergebnisse von *Lichtenheldt* nicht nur für endlich benachbarte Lagen gelten.

Beispiel: Gegeben sind drei Lagen $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$ und $\overline{A_3 B_3}$ eines bewegten Getriebegliedes $\overline{AB}$ beliebig (Abb. 20). Wie muß eine vierte Lage $\overline{A_4 B_4}$

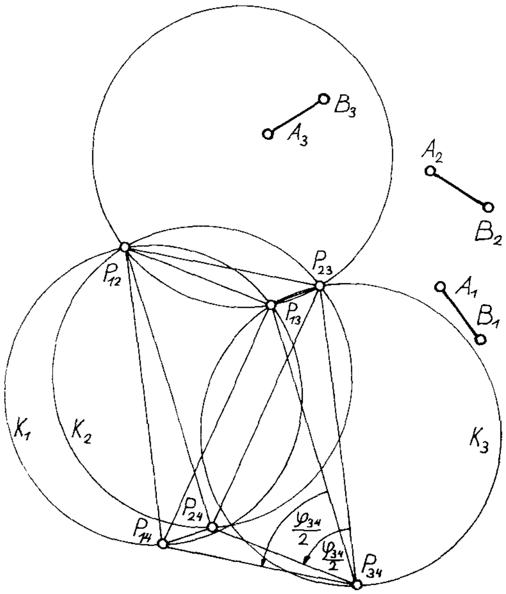


Abb. 20
Gegeben drei Lagen $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$, $\overline{A_3 B_3}$. K_3 ist geometrischer Ort für P_{34}, wenn der Sonderfall „Hyperbel + unendlich ferne Gerade" bei der Mittelpunktkurve auftreten soll

angenommen werden, damit die Mittelpunktkurve in eine Hyperbel, auf der alle sechs Pole liegen, und die unendlich ferne Gerade zerfällt?

Nach *Lichtenheldt* [13] sind die geometrischen Örter für A_4 und B_4 Ellipsen. Eine andere Form der Lösung soll im folgenden abgeleitet werden (vgl. auch [5]):

Bekannt sind P_{12}, P_{23} und P_{13} (Abb. 20). Nach dem Satz über die Mittelgeraden (Abschnitt 2) muß gelten:

$$\sphericalangle P_{13} P_{12} P_{23} = - \sphericalangle P_{24} P_{12} P_{14} \qquad (6.2)$$

Da alle Gegenpolvierecke hier Parallelogramme sein müssen, gilt weiterhin:

$$\sphericalangle P_{24} P_{12} P_{14} = \sphericalangle P_{13} P_{34} P_{23} \qquad (6.3)$$

und somit

$$\sphericalangle P_{13} P_{12} P_{23} = - \sphericalangle P_{13} P_{34} P_{23} \qquad (6.4)$$

Die Strecke $\overline{P_{13} P_{23}}$ erscheint also von P_{12} bzw. P_{34} aus unter gleichen Winkeln in entgegengesetztem Drehsinn. P_{12} und P_{34} liegen demnach auf zwei spiegelbildlichen Kreisen über der gemeinsamen Sehne $\overline{P_{13} P_{23}}$. Der Kreis durch die Pole P_{12}, P_{23} und P_{13} ist der Poldreiecksumkreis, der Kreis durch die Pole P_{23}, P_{13} und P_{34} also der sogenannte „Spiegelpoldreiecks-Umkreis K_3".

Die Aufgabe ist gelöst, wenn man P_{34} beliebig auf K_3 (oder P_{24} auf K_2 oder P_{14} auf K_1) annimmt; die übrigen Pole und Drehwinkel ergeben sich aus der Forderung, daß alle Gegenpolvierecke Parallelogramme sein sollen. Umgekehrt kann man auch einen Drehwinkel in die gesuchte vierte Lage vorgeben, z. B.

φ_{34} und daraus P_{34} auf K_3 und die beiden übrigen, noch fehlenden Pole bestimmen.

Diese Beziehungen gelten auch, wenn zwei oder drei von den Ausgangslagen unendlich benachbart sind: Wenn etwa die beiden Lagen E_2 und E_3 unendlich benachbart sind, sind auch die Pole P_{12} und P_{13} unendlich benachbart; der Umkreis des Poldreiecks $P_{12}\,P_{23}\,P_{13}$ berührt die Polgerade $\overline{P_{12}\,P_{13}} \equiv t_1$ und der Spiegelpoldreiecks-Umkreis K_1 ist das Spiegelbild des Poldreiecksumkreises bezüglich t_1. Wenn E_1, E_2 und E_3 unendlich benachbart sind, heißt der Umkreis des Poldreiecks $P_{12}\,P_{23}\,P_{13}$ „Rückkehrkreis k_R“ und die drei Spiegelpoldreiecks-Umkreise fallen mit dem Wendekreis k_W zusammen.

7. Die Kreispunktkurve bei den Sonderfällen der Mittelpunktkurve

Wenn man für eine vorgegebene Polkonfiguration die Kreispunktkurve ermitteln will, bestimmt man zunächst die Spiegelpole einer Lage und dann aus einem Spiegelgegenpolviereck die Kreispunktkurve, genauso, wie man die Mittelpunktkurve aus einem Gegenpolviereck konstruiert. Dafür einige Beispiele:

In Abb. 21 wurde angenommen, daß die Mittelpunktkurve aus Gerade + isoliertem Punkt besteht und daß drei Pole, die zusammen ein Poldreieck bilden,

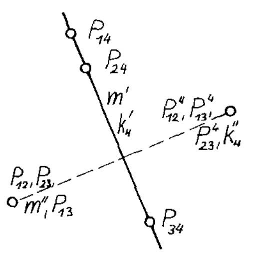


Abb. 21. Sonderfall „Gerade + isolierter Punkt“ bei Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve

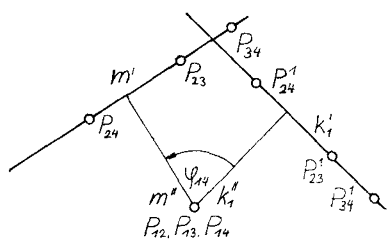


Abb. 22. Sonderfall „Gerade + isolierter Punkt“ bei Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve

z. B. P_{12}, P_{23} und P_{13}, exakt zusammenfallen. Dann fallen auch die Spiegelpole P^4_{12}, P^4_{23} und P^4_{13} exakt zusammen. Die Kreispunktkurve k_4 besteht also, unabhängig von der Anordnung der Pole auf der Geraden, wieder aus Gerade + isoliertem Punkt ($k_4' + k_4''$ in Abb. 21).

Wenn die Mittelpunktkurve aus Gerade + isoliertem Punkt besteht und drei Pole, die eine Indexziffer gemeinsam haben, z. B. P_{13}, P_{14} und P_{12}, exakt zusammenfallen (Abb. 22), muß auch die Kreispunktkurve k_1 diese drei zusammenfallenden Pole enthalten. Sie besteht also, unabhängig von der Anordnung der Pole auf der Geraden, ebenfalls aus Gerade + isoliertem Punkt ($k_1' + k_1''$ in Abb. 22).

In Abb. 23 wurde angenommen, daß die Mittelpunktkurve aus Kreis + unendlich ferner Geraden besteht, daß das Poldreieck $P_{12}\,P_{23}\,P_{13}$ im Endlichen liegt und die drei zugehörigen Gegenpole im Unendlichen. Unabhängig von der Form

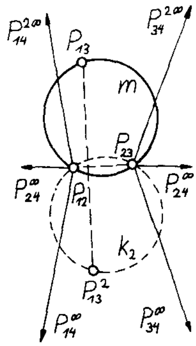


Abb. 23. Sonderfall „Kreis + unendlich ferne Gerade" bei Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve

des Poldreiecks liegen auf der Kreispunktkurve k_2 drei Pole (P_{12}, P_{23} und P^2_{13}) im Endlichen und die drei zugehörigen Spiegelgegenpole (P^{∞}_{24}, $P^{2\infty}_{14}$ und $P^{2\infty}_{34}$) in verschiedenen Richtungen im Unendlichen. Die Kreispunktkurve k_2 besteht also ebenfalls aus Kreis + unendlich ferner Geraden.

In Abb. 24 wurde angenommen, daß die Mittelpunktkurve aus Gerade + unendlich ferner Geraden besteht und daß die drei Pole P_{14}, P_{24} und P_{34}, die die Indexziffer 4 gemeinsam haben, im Endlichen liegen. Unabhängig von der Anordnung dieser Pole auf der Geraden liegen die drei zugehörigen Spiegelgegenpole $P^{4\infty}_{12}$, $P^{4\infty}_{23}$ und $P^{4\infty}_{13}$ in derselben Richtung im Unendlichen. Die Kreispunktkurve k_4 besteht also aus Gerade + unendlich ferner Geraden.

In Abb. 25 wurde angenommen, daß die Mittelpunktkurve aus Gerade + unendlich ferner Geraden besteht und daß die drei Pole P_{12}, P_{23} und P_{13}, die zusammen ein Poldreieck bilden, auf der Geraden im Endlichen liegen. Bei

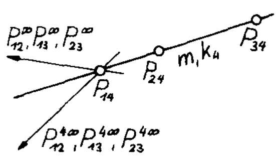


Abb. 24. Sonderfall „Gerade + unendlich ferne Gerade" bei Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve

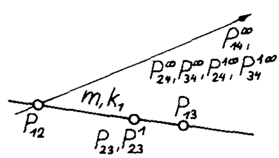


Abb. 25. Sonderfall „Gerade + unendlich ferne Gerade" bei Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve

beliebiger Anordnung dieser drei Pole auf der Geraden liegen stets die Pole P_{13}, P^1_{23} und P_{12} auf einer Geraden im Endlichen und die drei zugehörigen Spiegelgegenpole $P^{1\infty}_{24}$, P^{∞}_{14} und $P^{1\infty}_{34}$ liegen in derselben Richtung im Unendlichen. Die Kreispunktkurve besteht also aus Gerade + unendlich ferner Geraden.

Zusammenfassung: In Abschnitt 7 wurde für einige Sonderfälle der Mittelpunktkurve jeweils die zugehörige Kreispunktkurve abgeleitet. Für den Fall, daß ein

Poldreieck auf einer Geraden liegt sowie für die Fälle, daß vier oder mehr Pole im Unendlichen liegen, werden Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve in Abschnitt 8 behandelt. Nach Ableitung der Kreispunktkurven zu den übrigen Sonderfällen der Mittelpunktkurve ([1, 2, 13; 21]) läßt sich zusammenfassen:

Wenn die Mittelpunktkurve in Kreis + Gerade zerfällt und auf dem Kreis nur zwei Pole liegen, ist die Kreispunktkurve eine Fokalkurve mit Knoten. Bei allen übrigen Sonderfällen der Mittelpunktkurve ist die zugehörige Kreispunktkurve ebenfalls ein Sonderfall.

Wenn die Kreispunktkurve in Kreis + Gerade zerfällt und auf dem Kreis nur zwei Pole liegen, ist die Mittelpunktkurve eine Fokalkurve mit Knoten. Bei allen übrigen Sonderfällen der Kreispunktkurve ist die zugehörige Mittelpunktkurve ebenfalls ein Sonderfall.

8. Drei besondere Polkonfigurationen

In den Abschnitten 6 und 7 wurde gezeigt, wie man aus einer vorgegebenen Konfiguration von sechs Polen die zugehörigen vier Lagen der bewegten Ebene und die Kreispunktkurve ermitteln kann. Die meisten Polkonfigurationen, die bei den Sonderfällen der Mittelpunktkurve auftreten können, lassen sich nach diesem Schema behandeln. Die übrigen sind in diesem Abschnitt zusammengefaßt.

Ein Poldreieck liegt auf einer Geraden

Wenn ein Poldreieck auf einer Geraden liegt, sind die Poldreieckswinkel unendlich klein, die zugehörigen drei Lagen der bewegten Ebene also unendlich benachbart. Die drei Pole liegen auf dem Rückkehrkreis der infinitesimalen Bewegung, dessen Durchmesser d also unendlich groß wird, ebenso wie der Durchmesser d des Wendekreises. Damit wird die *Euler-Savary*sche Gleichung zu

$$\frac{1}{d} = \left(\frac{1}{PA} \pm \frac{1}{PA_0}\right) \cos\alpha = 0 \tag{8.1}$$

wobei das positive Vorzeichen gilt, wenn der Momentanpol P zwischen A und A_0 liegt. Jeder Punkt A der bewegten Ebene, der nicht auf der Poltangente ($\cos\alpha = 0$) liegt, fällt mit seinem Bahnkurven-Krümmungsmittelpunkt A_0 zusammen, während auf der Poltangente keine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A und A_0 besteht. Viergelenkgetriebe, die man nach diesen Angaben entwirft, sind — soweit sie sich überhaupt bewegen können — durchschlagende Gelenkvierecke in der Verzweigungslage. Abb. 26 bringt ein derartiges Getriebe, Teile der Polkurven und die beiden endlich voneinander entfernten Punkte P_{I} und P_{II}, die während des Durchschlagens unmittelbar nacheinander zu Momentanpolen werden [6]. Alle Punkte der Koppelebene eines derartigen Getriebes, mit Ausnahme gewisser Bereiche der Poltangente, durchlaufen während des Durchschlagens Spitzen in ihren Bahnkurven.

Wenn man nun eine vierte Lage der bewegten Ebene beliebig hinzunimmt, muß die Gerade, auf der das Poldreieck sowie P_{I} und P_{II} liegen, ein Teil der Mittelpunktkurve sein. Die Mittelpunktkurve zerfällt also in Kreis + Gerade, Gerade + isolierten Punkt, zwei senkrechte Gerade + unendlich ferne Gerade

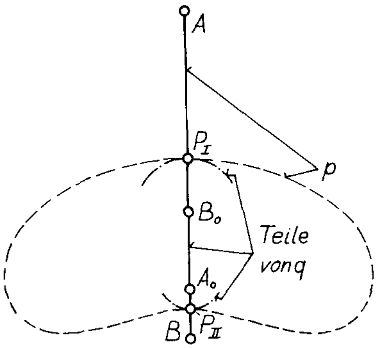


Abb. 26. Durchschlagendes Viergelenkgetriebe A_0ABB_0 in der Verzweigungslage. Gangpolbahn p, Rastpolbahn q.

oder Gerade + unendlich ferne Gerade. Die Kreispunktkurve ist zur Mittelpunktkurve kongruent.

Alle Pole, aber nicht alle Lagen sind unendlich benachbart

Zu untersuchen ist der Fall: Die drei Lagen E_1, E_2 und E_3 der bewegten Ebene E sind unendlich benachbart, der Pol P_{14} ist unendlich benachbart dem Momentanpol $P = P_{12} = P_{23} = P_{13}$. Die Kreispunktkurve fällt, wenigstens teilweise, nicht mit der Poltangente zusammen.

Es sei $A = A_1 = A_2 = A_3$ ein Punkt der Kreispunktkurve, der nicht auf der Poltangente liegt und A_0 der zugehörige Punkt der Mittelpunktkurve. A_4 liegt einerseits auf einem Kreis a_{123} um A_0 mit dem Radius $\overline{AA_0}$, andererseits auf einem Kreis a_{14} um P mit dem Radius $\overline{PA}$ (Abb. 27). Die beiden Kreise berühren sich bei allgemeiner Annahme von A, A_0 und P im Punkte A, also

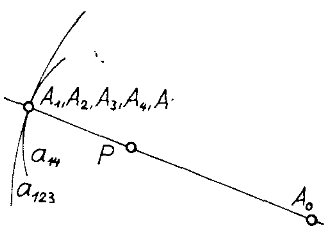


Abb. 27. Gegeben A_0, A_1, A_2, A_3, $P = P_{14}$, gesucht A_4

müssen im allgemeinen Fall die vier Lagen unendlich benachbart sein.

Die *Euler-Savary*sche Gleichung lautet allgemein:

$$\left(\frac{1}{PA} \pm \frac{1}{PA_0}\right) \cos\alpha = \frac{1}{d} \tag{8.2}$$

wobei das positive Vorzeichen gilt, wenn P zwischen A und A_0 liegt und der Winkel α hier nach Voraussetzung von 90° verschieden ist.

Läßt man A oder A_0 mit P zusammenfallen, so ergibt sich aus der Gleichung, daß der Wendekreisdurchmesser $d = 0$ sein muß. Das bedeutet aber im allgemeinen, daß alle vier Lagen durch Drehung um einen festen Punkt auseinander hervorgehen (vgl. [16]). Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve müssen P enthalten, im übrigen ist ihre Form durch die Polkonfiguration nicht bestimmt. Jedem Punkt der Mittelpunktkurve entspricht P als Kreispunkt, jedem Punkt der Kreispunktkurve entspricht P als Mittelpunkt. Wenn man nach diesen Angaben Viergelenkgetriebe entwirft, erhält man Getriebe, bei denen sich alles um einen Punkt dreht.

Läßt man A_0 mit A zusammenfallen, so wird der Wendekreisdurchmesser d unendlich groß (vgl. dazu den Anfang dieses Abschnittes 8).

Pole liegen im Unendlichen

Ein Pol liegt im Unendlichen: Wenn zwei Lagen, etwa $\overline{A_3 B_3}$ und $\overline{A_4 B_4}$, eines bewegten Getriebegliedes $\overline{AB}$ zueinander parallel sind, liegt der zugehörige Pol P_{34}^{∞} senkrecht zur Translationsrichtung im Unendlichen.

Wenn umgekehrt ein Pol im Unendlichen vorgegeben ist und eine der zugehörigen Lagen des bewegten Getriebegliedes im Endlichen, kann die zweite Lage parallel zur ersten im Endlichen liegen. Man kann die Translation als eine Drehung um den unendlich fernen Pol und einen unendlich kleinen Winkel auffassen. Eine Drehung um einen endlichen Winkel bringt die zweite Lage ins Unendliche; und wenn man nicht weiß, wie groß der Drehwinkel ist, kann man auch nicht angeben, in welcher Richtung die zweite Lage im Unendlichen liegt.

Drei Pole liegen im Endlichen, die Gegenpole im Unendlichen: Nach Abschnitt 4 sind hier zwei wesentlich voneinander verschiedene Fälle zu unterscheiden: Entweder liegen drei Pole, die eine Indexziffer gemeinsam haben, im Endlichen oder drei Pole, die zusammen ein Poldreieck bilden.

Im ersten Fall sind nach *Alt* [2] drei von vier Lagen untereinander parallel, Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve bestehen aus Kreis + unendlich ferner Geraden. Der zweite Fall soll im folgenden behandelt werden:

In Abb. 28 ist angenommen, daß die Pole P_{12}, P_{23} und P_{13} im Endlichen liegen. Gegeben sei die Lage A_1 des bewegten Punktes A. Die zugehörigen Lagen A_2 und A_3 sind nach der Spiegelungsmethode (Abschnitt 2) ermittelt. Um A_4 zu

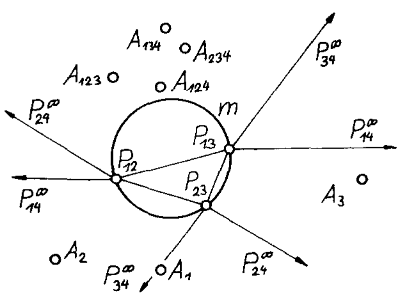


Abb. 28. Ein Poldreieck im Endlichen, die drei Gegenpole im Unendlichen

bestimmen, müßte man einen Grundpunkt an einer unendlich fernen, im übrigen unbekannten Polgeraden spiegeln. A_4 liegt also in unbekannter Richtung im Unendlichen. Von einem Punkt B der bewegten Ebene, dessen Lage B_4 im Endlichen liegt, liegen die zugeordneten Lagen B_1, B_2 und B_3 in unbekannten Richtungen im Unendlichen.

Sind die drei Lagen $\overline{C_1 D_1}$, $\overline{C_2 D_2}$ und $\overline{C_3 D_3}$ des bewegten Getriebegliedes $\overline{CD}$ unendlich benachbart, so kann bei der hier betrachteten Polkonfiguration $\overline{C_4 D_4}$ auch parallel zu den ersten drei Lagen im Endlichen liegen, wobei die Schubstrecke durch die Polkonfiguration nicht festgelegt ist.

Wenn drei Pole, die zusammen ein Poldreieck bilden, im Endlichen und die drei zugehörigen Gegenpole im Unendlichen liegen, besteht nach Abschnitt 4 die Mittelpunktkurve aus Kreis + unendlich ferner Geraden und nach Abschnitt 7 auch die Kreispunktkurve in drei Lagen, während sie sich in der vierten aus den Polen und Spiegelgegenpolen allein nicht konstruieren läßt, da diese alle im Unendlichen liegen.

Ein Gegenpolpaar liegt im Endlichen, zwei im Unendlichen: Es sei z. B. angenommen, daß P_{12} und P_{34} im Endlichen liegen und alle übrigen Pole im

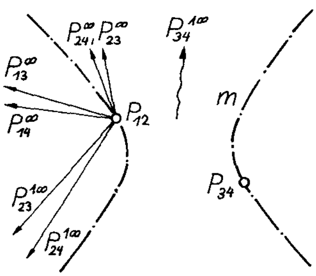


Abb. 29. Ein Gegenpolpaar im Endlichen, zwei im Unendlichen

Unendlichen (Abb. 29). Durch Konstruktion homologer Punktlagen ergibt sich: Von zwei Punkten A und B der bewegten Ebene befinden sich die Lagen A_1 und A_2 sowie B_3 und B_4 im Endlichen, die Lagen A_3 und A_4 sowie B_1 und B_2 in unbekannten Richtungen im Unendlichen.

Im speziellen Fall, daß die Lagen $\overline{C_1 D_1}$ und $\overline{C_2 D_2}$ sowie $\overline{C_3 D_3}$ und $\overline{C_4 D_4}$ des bewegten Getriebegliedes $\overline{CD}$ unendlich benachbart sind [21], können die Lagen $\overline{C_1 D_1}$ und $\overline{C_3 D_3}$ auch parallel zueinander beide im Endlichen liegen, wobei aber die Schubstrecke durch die Polkonfiguration nicht bestimmt ist.

Nach Abschnitt 4 besteht die Mittelpunktkurve aus Hyperbel + unendlich ferner Geraden. Die Kreispunktkurve läßt sich aus der Polkonfiguration allein nicht eindeutig bestimmen, denn die Spiegelgegenpole zu den beiden Polen im Endlichen lassen sich nicht eindeutig angeben. Im allgemeinen liegt ein solcher Spiegelgegenpol in unbekannter Richtung im Unendlichen. Gelingt es, die Richtung eines dieser Spiegelgegenpole festzustellen, so kann man die Kreispunktkurve in der entsprechenden Lage als Gerade + unendlich ferne Gerade nach Abschnitt 4 konstruieren. In speziellen Fällen, etwa bei paarweise unendlich benachbarten Lagen, können diese Spiegelgegenpole auch im Endlichen liegen, so daß sich die Kreispunktkurve als Hyperbel + unendlich ferne Gerade (oder als Spezialfall davon auch als zwei senkrechte Gerade + unendlich ferne Gerade) ergibt [21].

Zwei Pole liegen im Endlichen, vier im Unendlichen: In Abb. 30 wurde angen mmen, daß die Pole P_{12} und P_{24} (die zusammen kein Gegenpolpaar bilden)

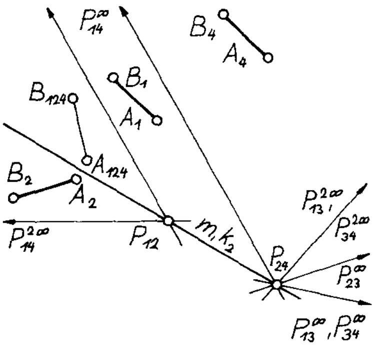


Abb. 30. Zwei Pole im Endlichen, vier im Unendlichen

im Endlichen liegen. Von dem bewegten Getriebeglied $\overline{AB}$ liegen die Lagen $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$ und $\overline{A_4 B_4}$ im Endlichen, $\overline{A_1 B_1}$ und $\overline{A_4 B_4}$ sind parallel, $\overline{A_3 B_3}$ liegt in unbekannter Richtung im Unendlichen. Von einem Getriebeglied $\overline{CD}$, dessen Lage $\overline{C_3 D_3}$ im Endlichen liegt, liegen die drei übrigen Lagen in unbekannten Richtungen im Unendlichen.

Die Annahme, daß die drei Lagen E_1, E_2 und E_4 der bewegten Ebene E unendlich benachbart sind, führt auf den zu Anfang dieses Abschnittes 8 behandelten Fall.

Die Mittelpunktkurve besteht aus Gerade + unendlich ferner Geraden (vgl. [2]). Die Kreispunktkurve läßt sich in drei ihrer Lagen als Gerade + unendlich ferne Gerade nach Abschnitt 4 konstruieren, während in der vierten eine Konstruktion aus drei Polen und den zugehörigen Spiegelgegenpolen allein nicht möglich ist, weil diese alle sechs im Unendlichen liegen.

Ein Pol liegt im Endlichen, fünf im Unendlichen: In Abb. 31 ist angenommen, daß P_{12} im Endlichen liegt und alle übrigen Pole im Unendlichen. Wenn man die Punktlagen C_1, D_3 und F_4 im Endlichen annimmt, liegt C_2 ebenfalls im Endlichen, C_3, C_4, D_1, D_2, F_1 und F_2 liegen in unbekannten Richtungen im Unendlichen, D_4 und F_3 können durch eine Translation mit unbekannter Schubstrecke aus D_3 bzw. F_4 hervorgehen oder in unbekannten Richtungen im Unendlichen liegen.

Wenn der im Endlichen gelegene Pol P_{12} ein Momentanpol ist (Abb. 32), die beiden homologen Lagen $\overline{A_1 B_1}$ und $\overline{A_2 B_2}$ des bewegten Getriebegliedes $\overline{AB}$

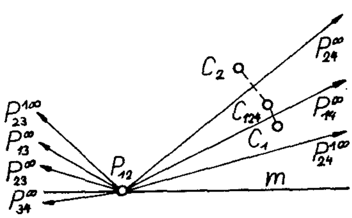


Abb. 31. Ein Pol im Endlichen, fünf im Unendlichen

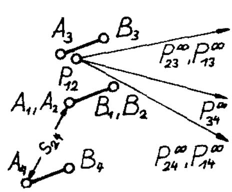


Abb. 32. Ein Pol im Endlichen, fünf im Unendlichen, zwei Lagen unendlich benachbart

also unendlich benachbart sind, können die beiden Lagen $\overline{A_3\,B_3}$ und $\overline{A_4\,B_4}$ parallel dazu im Endlichen liegen, wobei man eine der Schubstrecken, z. B. s_{24} (in Abb. 32) noch frei wählen kann.

Die Mittelpunktkurve besteht nach Abschnitt 4 aus Gerade + unendlich ferner Geraden. Die Kreispunktkurve ist durch die Angabe der sechs Pole noch nicht eindeutig festgelegt, weil dadurch noch nicht alle erforderlichen Spiegelpole bestimmt sind. Wenn aus zusätzlichen Angaben hervorgeht, daß ein Spiegelgegenpolpaar im Endlichen liegt, läßt sich die Kreispunktkurve in der entsprechenden Lage nach Abschnitt 4 als Hyperbel + unendlich ferne Gerade konstruieren. Wenn zwei Spiegelpole im Endlichen liegen, läßt sich die Kreispunktkurve in der entsprechenden Lage als Gerade + unendlich ferne Gerade konstruieren. Wenn von einem Spiegelgegenpolviereck ein Pol im Endlichen und die drei anderen im Unendlichen liegen, wie es z. B. der Fall ist, wenn zwei von vier Lagen unendlich benachbart sind, läßt sich die Kreispunktkurve in der entsprechenden Lage nach Abschnitt 4 als Gerade + unendlich ferne Gerade konstruieren.

Sechs Pole liegen im Unendlichen: Zunächst sei angenommen, daß alle Winkelhalbierenden, die man zu je zwei Richtungsgeraden der einzelnen Gegenpolpaare ziehen kann, parallel oder senkrecht zueinander sind. Eine derartige

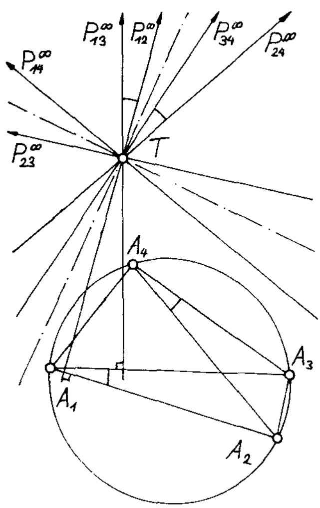


Abb. 33. Sechs Pole im Unendlichen

Polkonfiguration ist in Abb. 33 skizziert; der Punkt T, durch den alle Richtungsgeraden gelegt sind, ist willkürlich angenommen. Nach Vorgabe der Lage A_1 eines Punktes A der bewegten Ebene und von A_2 auf einer bekannten Geraden lassen sich A_3 und A_4 konstruieren.

Nach Voraussetzung gilt (Abb. 33):

$$\sphericalangle\, P_{13}^{\infty}\; T P_{12}^{\infty} = + \sphericalangle\, P_{34}^{\infty}\; T P_{24}^{\infty} \tag{8.3}$$

Da die Translationsrichtungen immer senkrecht zu den Richtungsgeraden der entsprechenden Pole sind, gilt also auch:

$$\sphericalangle A_3 A_1 A_2 = \sphericalangle A_3 A_4 A_2 \tag{8.4}$$

Also liegen die vier homologen Lagen des Punktes A auf einem Kreis; die vier Lagen der bewegten Ebene sind Stationen einer Kreisschiebung. Als Mittelpunktkurve kann man eine beliebige Kurve verwenden, die Kreispunktkurve ist zur Mittelpunktkurve kongruent.

Läßt man die Voraussetzung senkrechter oder paralleler Winkelhalbierender fallen, so liegen die vier Lagen eines Punktes nicht mehr auf einem Kreis, Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve liegen im Unendlichen.

9. Zusammenstellung von Ergebnissen

Tafel 2 enthält alle Sonderfälle der Mittelpunktkurve, die auftreten können, wenn vier homologe Lagen der bewegten Ebene endlich benachbart sind, Tafel 3 alle Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn zwei von vier Lagen unendlich und die anderen endlich benachbart sind und Tafel 4 alle Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn drei von vier Lagen unendlich und die anderen endlich benachbart sind.

Den Skizzen in den Tafeln kann man die Lagenzuordnung, Mittelpunktkurve, Kreispunktkurve, Polkonfiguration und Spiegelpolkonfiguration bei den einzelnen Sonderfällen entnehmen, jedoch keine metrischen Beziehungen.

In der ersten Spalte der Tafeln wird angegeben, welche allgemeinen Beziehungen zwischen den vier Lagen E_1, E_2, E_3 und E_4 der bewegten Ebene E bestehen, wenn der betreffende Sonderfall der Mittelpunktkurve auftritt. Wenn von vier Lagen voraussetzungsgemäß zwei unendlich benachbart sind, werden diese immer mit den Indizes 2 und 3 bezeichnet, sind drei Lagen unendlich benachbart, werden sie immer mit 1, 2 und 3 bezeichnet.

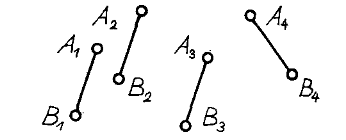
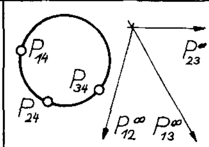
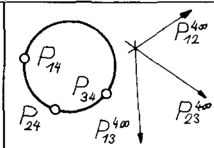
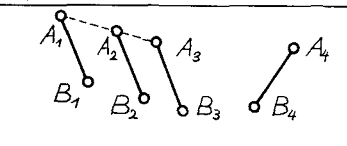
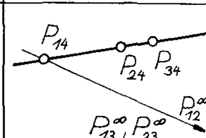
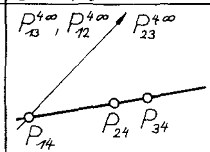
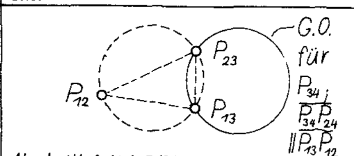
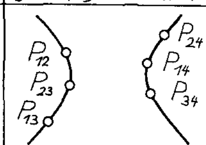
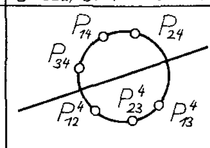
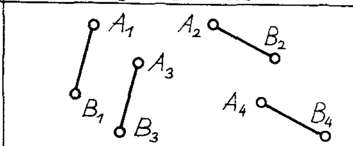
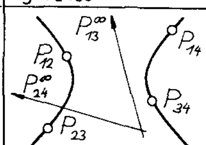
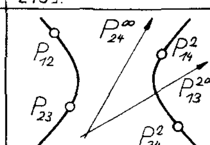
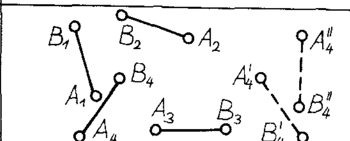
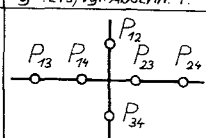
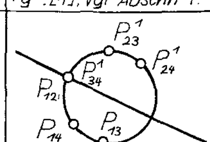
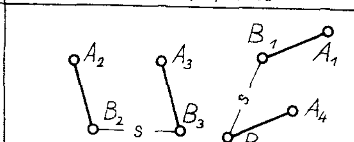
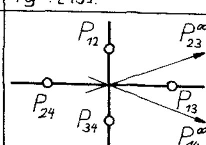
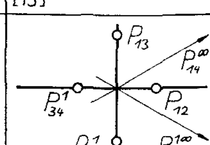
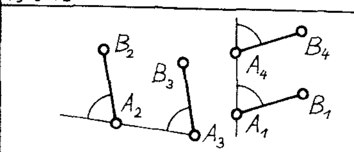
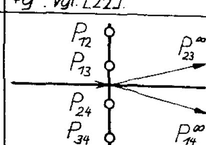
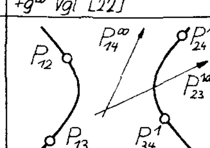
In der zweiten Spalte wird die Gestalt der Mittelpunktkurve skizziert. Der Zusatz „$+ g^{\infty}$" bedeutet, daß die unendlich ferne Gerade ein Bestandteil der Mittelpunktkurve ist. Auf der Mittelpunktkurve werden als Beispiel für die zugehörige Polkonfiguration drei Gegenpolpaare angegeben.

In der dritten Spalte wird die Gestalt der Kreispunktkurve skizziert. Der Zusatz „$+ g^{\infty}$" bedeutet, daß die unendlich ferne Gerade ein Bestandteil der Kreispunktkurve ist. Auf der Kreispunktkurve werden als Beispiel für die zugehörige Spiegelpolkonfiguration drei Spiegelgegenpolpaare angegeben. Die Anordnung der Pole und Spiegelgegenpole auf einem Sonderfall der Kreispunktkurve ist dieselbe, wie die Anordnung der Pole und Gegenpole auf demselben Sonderfall bei der Mittelpunktkurve (vgl. Abschnitt 4).

Anwendungsmöglichkeiten: Bei manchen Aufgaben der Getriebesynthese sind vier Lagen einer bewegten Ebene vorgegeben. Wenn man dieselben Angaben in der Spalte „Vier Lagen" einer der Tafeln findet, kann man der Tafel sofort die allgemeine Polkonfiguration, Mittelpunktkurve und die Kreispunktkurve entnehmen. Kennt man durch die Aufgabenstellung sechs Pole und findet man eine derartige Polkonfiguration in einer der Tabellen beschrieben, so kann man dort sofort Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve entnehmen.

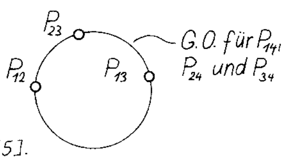
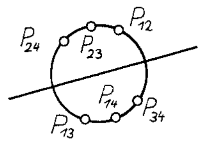
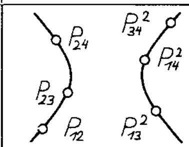
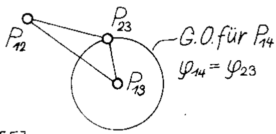
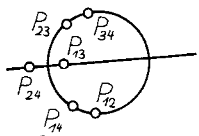
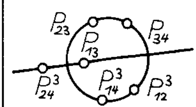
Tafel 2, Blatt 1

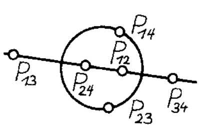
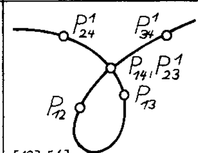
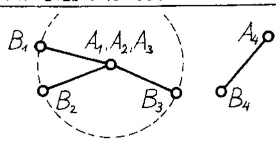
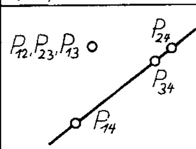
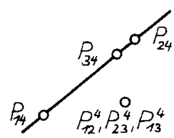
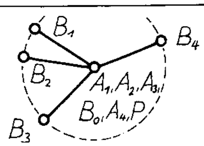
Die Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn alle vier Lagen endlich benachbart sind

Zeile	Vier Lagen	Mittelpunktkurve	Kreispunktkurve
1	 [2].	 $+g^\infty$ [2]; vgl. Abschnitt 4.	 $+g^\infty$ [2]; vgl Abschnitt 4.
2	 [2].	 $+g^\infty$ [2], vgl Abschnitt 4.	 $+g^\infty$ [2], vgl A 4 und A 7.
3	 Abschnitt 6. Vgl. [13] und [5].	 $+g^\infty$ [13]	 [13].
4	 [1].	 $+g^\infty$ [1]; vgl. Abschn. 4.	 $+g^\infty$ [1], vgl Abschn 4.
5	 $\overline{A_4B_4}$, $\overline{A_4'B_4'}$ oder $\overline{A_4''B_4''}$. [13].	 $+g^\infty$ [13].	 [13]
6	 Vgl. [22].	 $+g^\infty$ Vgl. [22].	 $+g^\infty$ Vgl [22]
7	 Abschnitt 6. Vgl [22].	 $+g^\infty$ Vgl. [22]	 $+g^\infty$ Vgl A 4 und [22]

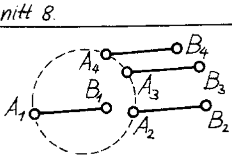
Tafel 2, Blatt 2

Die Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn alle vier Lagen endlich benachbart sind

<table>
<tr><th>Zeile</th><th>Vier Lagen</th><th>Mittelpunktkurve</th><th>Kreispunktkurve</th></tr>
<tr><td>8</td><td>[13], [5].</td><td>[13].</td><td>$+g^\infty$. [13].</td></tr>
<tr><td>9</td><td>[13], [5]</td><td>[13].</td><td>[13].</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$P_{23}^1 = P_{23}^4 - P_{14}$
$P_{14}^2 = P_{14}^3 = P_{23}$

Vgl. auch [13] und [5].</td><td>[13], [6].</td><td>[13], [6].</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Abschnitt 6.</td><td></td><td>Abschnitt 7.</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Abschnitt 8.</td><td>Beliebige Kurve, die P enthält.

Abschnitt 8.</td><td>Beliebige Kurve, die P enthält.

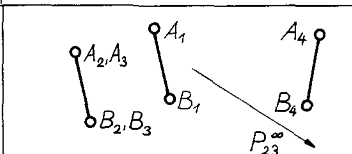
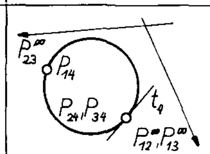
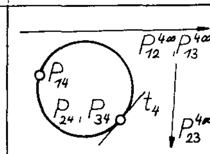
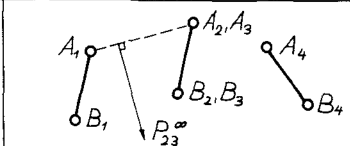
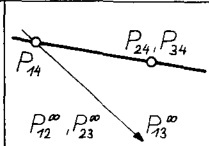
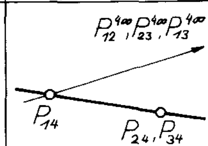
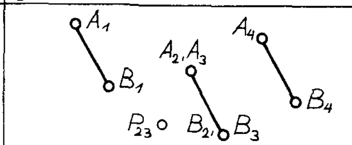
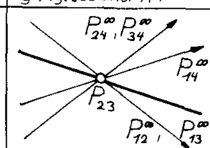
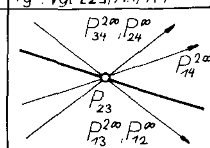
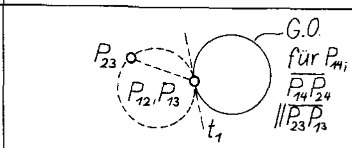
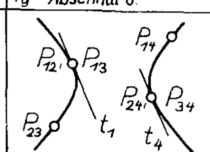
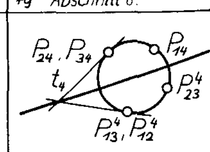
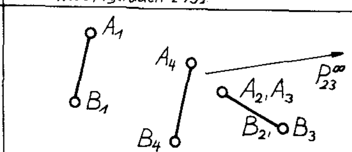
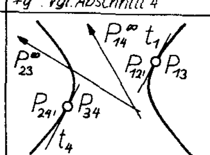
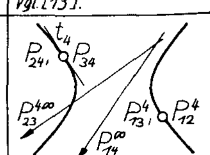
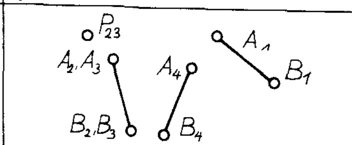
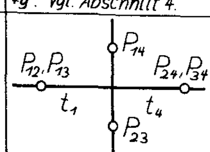
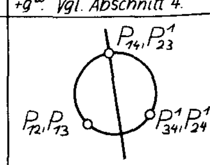
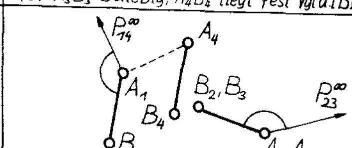
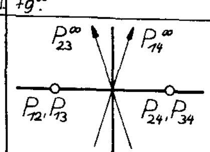
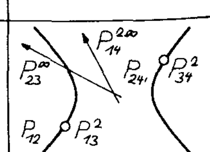
Abschnitt 8.</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Abschnitt 8</td><td>Beliebige Kurve.

Abschnitt 8.</td><td>≅ Mittelpunktkurve.

Abschnitt 8</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

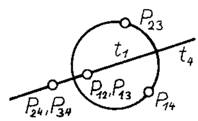
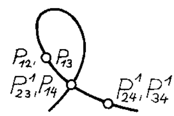
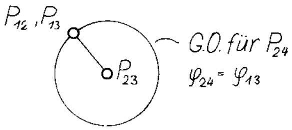
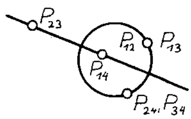
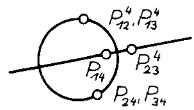
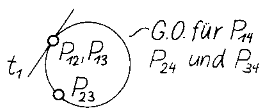
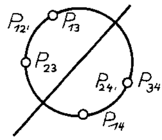
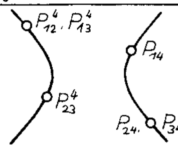
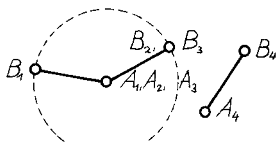
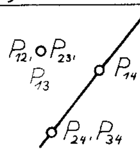
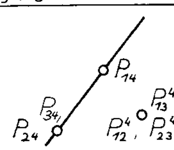
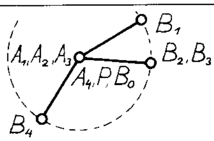
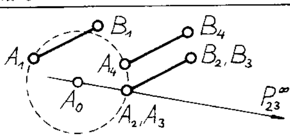
Tafel 3, Blatt 1

Die Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn zwei von vier Lagen unendlich und die übrigen endlich benachbart sind

Zeile	Vier Lagen	Mittelpunktkurve	Kreispunktkurve
1	 Vgl. [2].	 $+g^{\infty}$ Vgl. [2] und A. 4.	 $+g^{\infty}$ Vgl. [2] und A. 4.
2	 Vgl [2]	 $+g^{\infty}$ Vgl [2] und A 4	 $+g^{\infty}$ Vgl [2], A 4, A 7
3	 Abschnitt 8	 $+g^{\infty}$ Abschnitt 8.	 $+g^{\infty}$ Abschnitt 8.
4	 Abschnitt 6, vgl. auch [13]	 $+g^{\infty}$ Vgl. Abschnitt 4	 Vgl. [13].
5	 Vgl [1]	 $+g^{\infty}$ Vgl. Abschnitt 4.	 $+g^{\infty}$ Vgl. Abschnitt 4.
6	 $\overline{A_1B_1}$ - $\overline{A_3B_3}$ beliebig, $\overline{A_4B_4}$ liegt fest Vgl a. [13]	 $+g^{\infty}$	
7	 Vgl Abschnitt 6 und [22].	 $+g^{\infty}$ Vgl [22].	 $+g^{\infty}$ Vgl A. 4 und [22].

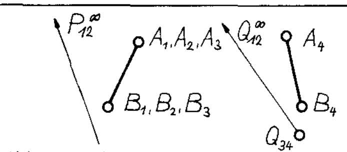
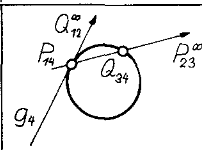
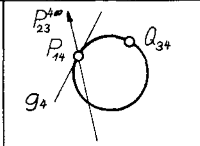
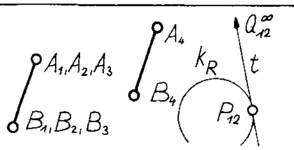
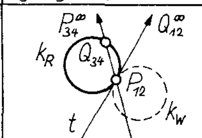
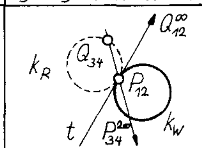
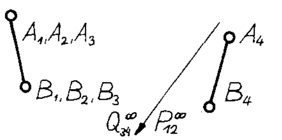
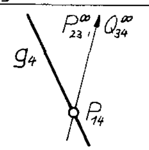
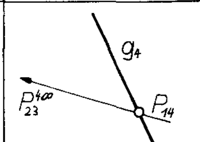
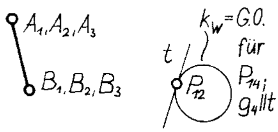
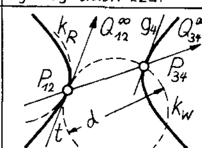
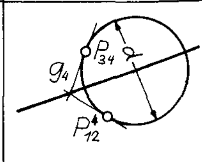
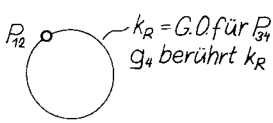
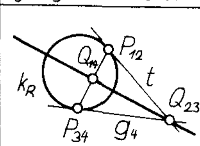
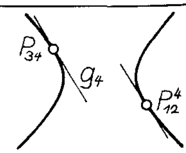
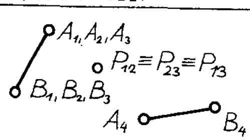
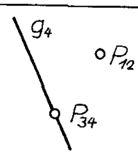
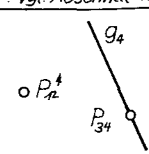
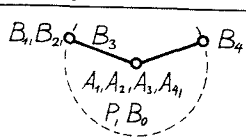
Tafel 3, Blatt 2

Die Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn zwei von vier Lagen unendlich und die übrigen endlich benachbart sind

Zeile	Vier Lagen	Mittelpunktkurve	Kreispunktkurve
8	$P_{23}^1 = P_{23}^4 = P_{14}$ $P_{14}^2 = P_{14}^3 = P_{23}$ Vgl. auch [13] und [5].	 Vgl. [13] und Abschnitt 4.	 Vgl. [13] und [6].
9	 Vgl auch [13] und [5]	 Vgl [13] und Abschn. 4.	 Vgl [13] und Abschn 4
10	 Vgl auch [13] und [5].	 Vgl. [13].	 $+g^\infty$. Vgl. [13] und A. 4.
11	 Abschnitt 6		 Abschnitt 7.
12	 Abschnitt 8	Beliebige Kurve, die P enthält. Abschnitt 8	Beliebige Kurve, die P enthalt Abschnitt 8.
13	 Abschnitt 8	Beliebige Kurve Abschnitt 8.	≅ Mittelpunktkurve Abschnitt 8

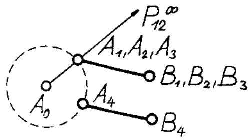
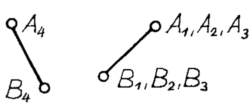
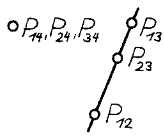
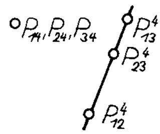
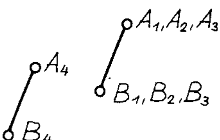
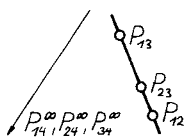
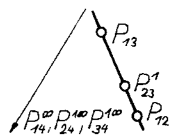
Tafel 4, Blatt 1

Die Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn drei von vier Lagen unendlich und die übrigen endlich benachbart sind

Zeile	Vier Lagen	Mittelpunktkurve	Kreispunktkurve
1	 Vgl. auch [2].	 $+g^{\infty}$ Vgl. Abschnitt 4	 $+g^{\infty}$. Vgl. Abschnitt 4.
2		 $+g^{\infty}$. Vgl. Abschnitt 4.	 $+g^{\infty}$. Vgl. Abschnitt 4
3	 Vgl. auch [2].	 $+g^{\infty}$ Vgl. auch [2].	 $+g^{\infty}$. Vgl. A.7 und [2].
4	 Vgl. Abschnitt 6.	 $+g^{\infty}$. Vgl. Abschnitt 4.	
5	 Vgl. auch [13] und [5].		 $+g^{\infty}$. Vgl. Abschnitt 4.
6	 Vgl. Abschnitt 6		 Abschnitt 7.
7	 Abschnitt 8	Beliebige Kurve, die P enthält Abschnitt 8.	Beliebige Kurve, die P. enthält. Abschnitt 8.

Tafel 4, Blatt 2

Die Sonderfälle der Mittelpunktkurve, wenn drei von vier Lagen unendlich und die übrigen endlich benachbart sind

Zeile	Vier Lagen	Mittelpunktkurve	Kreispunktkurve
8	 *Abschnitt 8.*	*Beliebige Kurve.* *Abschnitt 8.*	*≅ Mittelpunktkurve.* *Abschnitt 8.*
9	 *Wendekreisdurchmesser $d=\infty$. Abschnitt 8.*	 *Abschnitt 8.*	 *Abschnitt 8.*
10	 *Wendekreisdurchmesser $d=\infty$. Abschnitt 8.*	 *$+g^{\infty}$. Abschnitt 8.*	 *$+g^{\infty}$. Abschnitt 8.*

Wenn durch die Aufgabenstellung noch nicht alle sechs Pole bestimmt sind, kann man den oder die fehlenden Pole u. U. so wählen, daß ein bestimmter Sonderfall der Mittelpunktkurve auftritt. Wenn durch die Aufgabenstellung nicht alle vier Lagen der bewegten Ebene eindeutig festgelegt sind, kann man die Lagen unter Umständen so anordnen, daß ein bestimmter Sonderfall der Mittelpunktkurve auftritt.

Die Methoden des letzten Absatzes sind natürlich immer mit einigem zusätzlichen Aufwand verbunden. In manchen Fällen macht es auch nicht mehr Arbeit, wenn man gleich die allgemeine Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve zeichnet. In anderen Fällen lohnt sich der zusätzliche Aufwand, z. B. dann, wenn man dadurch auf einfache Konstruktionsgesetze kommt, die man mehrfach verwenden kann oder wenn man das Getriebe aus Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve nicht konstruieren, sondern berechnen will, wozu diese Kurven eine möglichst einfache geometrische Form und analytische Gleichung haben sollen.

Einige der Polkonfigurationen und Bewegungsgesetze in den Tabellen sehen vielversprechend aus und scheinen nur auf den Konstrukteur zu warten, der eine Anwendungsmöglichkeit für sie findet; andere werden vielleicht nie zur praktischen Anwendung kommen. Diese Frage soll hier nicht voreilig entschieden werden und deshalb wurden alle diese Fälle mit in die Tabelle aufgenommen: „Vielleicht ist es Plunder, vielleicht ist es Gold..." [8].

10. Anwendungsbeispiele

Entwurf eines Rastgetriebes: Gegeben sind die drei Lagen $\overline{T_1 S_1}$, $\overline{T_2 S_2}$ und $\overline{T_4 S_4}$ des bewegten Getriebegliedes $\overline{TS}$ (Abb. 34). Gesucht wird ein Getriebe,

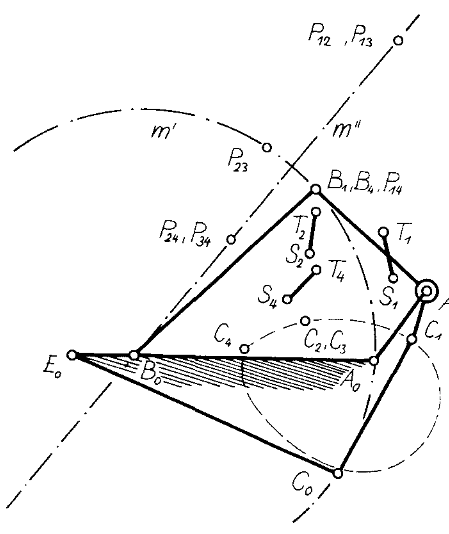


Abb. 34. Sechsgliedriges Getriebe für drei vorgegebene Lagen $\overline{T_1 S_1}$, $\overline{T_2 S_2}$, $\overline{T_4 S_4}$ und Rast im Bereich der Lagen 1–2–4 mit besonderer („zweipunktiger") Güte der Rast in der Lage 2

das diese drei Lagen verwirklicht und ein damit gekoppeltes Rastgetriebe für den Bereich der Lagen 1—2—4 mit besonderer („zweipunktiger“) Güte der Rast in der Lage 2.

Durch die vorgegebenen drei Lagen sind die Pole P_{12}, P_{24} und P_{14} bestimmt (Abb. 34). Wenn man eine vierte Lage $\overline{T_3 S_3}$ unendlich benachbart zu $\overline{T_2 S_2}$ annimmt, sind die Pole P_{13} und P_{12} sowie die Pole P_{34} und P_{24} unendlich benachbart und über den Momentanpol P_{23} kann noch frei verfügt werden.

Wenn P_{23} symmetrisch zu P_{14} bezüglich der Geraden $\overline{P_{12} P_{24}}$ angenommen wird, ergibt sich die in der Tafel 3, Zeile 8 beschriebene Polkonfiguration. Damit kann man der Tabelle entnehmen, daß die Mittelpunktkurve aus Kreis + Gerade ($m' + m''$ in Abb. 34) besteht und die Kreispunktkurve eine Fokalkurve mit Knoten ist.

Unter Verwendung der Mittelpunktkurve wird nun das Viergelenkgetriebe $A_0 A B B_0$ entworfen. Die homologen Punktlagen C_1, C_2, C_3 und C_4 liegen auf einem Kreis, C_2 und C_3 unendlich benachbart; die Koppelkurve des Punktes C des Viergelenkgetriebes $A_0 A B B_0$ ist im Bereich der Lagen 1—2—4 annähernd kreisbogenförmig und berührt den Kreis in der Lage 2 (mindestens) zweipunktig, die Schwinge $\overline{E_0 C_0}$ bleibt also im gewünschten Bereich angenähert in Ruhe.

Entwurf einer Geradführung: Gegeben sind von einem Punkt C die homologen Lagen C_1 bis C_4 auf einer Geraden, C_1, C_2 und C_3 sind unendlich benachbart. Gesucht wird ein Viergelenkgetriebe, das diese vier Punktlagen verwirklicht, mit anderen Worten eine in C_1 dreipunktig und in C_4 einpunktig angenäherte Geradführung längs der Strecke $\overline{C_1 C_4}$ (Abb. 35).

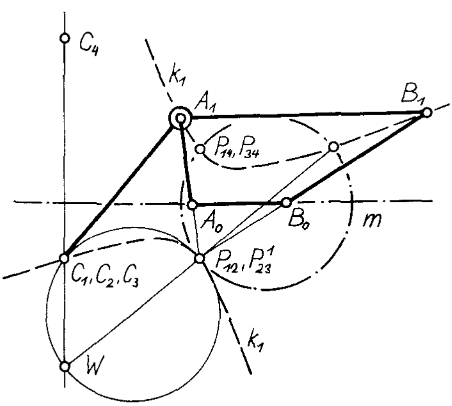


Abb. 35. Geradführung längs $\overline{C_1 C_4}$ mit besonderer („dreipunktiger“) Güte in C_1

Die Pole P_{12} und P_{34}, die durch die Aufgabenstellung noch nicht eindeutig festgelegt sind, werden so gewählt, daß die in Tafel 4, Zeile 5 beschriebene Polkonfiguration auftritt und damit für die Mittelpunktkurve der Sonderfall Kreis + Gerade und für die Kreispunktkurve der Sonderfall Hyperbel + unendlich ferne Gerade.

Unter Verwendung von Mittelpunktkurve und Kreispunktkurve wird nun das Viergelenkgetriebe $A_0\,ABB_0$ entworfen. Die Koppelkurve des Punktes C des Viergelenkgetriebes fällt im Bereich der Lagen 1–4 annähernd mit der Strecke $\overline{C_1\,C_4}$ zusammen und besitzt in C_1 eine mit dieser Strecke zusammenfallende Wendetangente.

Literatur

[1] *H. Alt:* Die Mittelpunktkurve und die Kreispunktkurve in dem Sonderfall, bei dem vier Lagen einer Ebene paarweise parallel sind. Maschinenbau/Der Betrieb, **16** (1937), S. 105–109.

[2] *H. Alt:* Die Mittelpunktkurve in dem Sonderfall, bei dem drei von vier Lagen einer Ebene einander parallel sind. Maschinenbau/Der Betrieb, **16** (1937), S. 377–379.

[3] *H. Alt:* Über die Totlagen von Getriebegliedern. Maschinenbau/Der Betrieb, **19** (1940), S. 173–176.

[4] *H. Alt:* Koppelrastgetriebe mit großer Güte der Rast und vorgeschriebenen Zeiten für Beginn und Ende der Rast. Maschinenbau/Der Betrieb, **20** (1941), S. 33–38.

[5] *R. Beyer:* Kinematische Getriebesynthese. Berlin, Springer 1953.

[6] *L. Burmester:* Lehrbuch der Kinematik. Leipzig, Felix 1888.

[7] *H. Durège:* Über die Kurve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar bildet. Mathematische Annalen, **5** (1872), S. 83–94.

[8] *M. von Eyth:* Hinter Pflug und Schraubstock. Berlin, Vier Falken Verlag o. J.

[9] *M. Grübler:* Getriebelehre. Berlin, Springer 1917/1921.

[10] *G. Kiper:* Synthese der ebenen Gelenkgetriebe. VDI-Forschungsheft 433, Düsseldorf 1952.

[11] *G. Kiper:* Einfache Konstruktionen von Gelenkvierecken für vier Lagenzuordnungen. Konstruktion, **6** (1954), S. 5–13.

[12] *R. Kraus:* Einfache Konstruktion von Gelenkvierecken durch Lagenreduktion und Zerfall der Mittelpunktskurve. Feinwerktechnik, **54** (1950), S. 69–72.

[13] *W. Lichtenheldt:* Einfache Konstruktionsverfahren zur Ermittlung der Abmessungen von Kurbelgetrieben. VDI-Forschungsheft 408, Berlin 1941.

[14] *G. Loria:* Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Band I, Leipzig, Teubner ^{2}1910.

[15] *K. Luck:* Die Grenzlagenkonstruktion des Gelenkviereckes. Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden, **10** (1961), S. 1131–1134.

[16] *W. Meyer zur Capellen:* Die Abbildung durch die Euler-Savarysche Formel. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **17** (1937), S. 288–295.

[17] *R. Müller:* Einführung in die Theoretische Kinematik. Berlin, Springer 1932.

[18] *R. van Rees:* Mémoire sur les focales. Correspondance mathématique, **5** (1829), S. 361–378.

[19] *F. Reuleaux:* Theoretische Kinematik. Braunschweig, Vieweg 1875/1900.

[20] *C. Rodenberg:* Die Bestimmung der Kreispunktkurven eines ebenen Gelenkvierseits. Zeitschrift für Mathematik und Physik, **36** (1891), S. 267–277.

[21] *J. Volmer:* Die Sonderfälle der Burmester'schen Mittelpunktkurve mit Doppelpunkt und ihre getriebetechnische Bedeutung. Revue de mécanique appliquée; Académie de la République Populaire Roumaine; Fremdsprachige Ausgabe, **4** (1959), S. 301–322.

[22] *J. Volmer:* Konstruktion der Burmester'schen Punkte in den Sonderfällen der Mittelpunktkurve. Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden, **10** (1961), S. 1117–1129.